Wstęp

Zacznijmy od tego, czemu ta notka w ogóle się pojawia. Na ostatnim tutoringu pokazywałem, jak udowodnić, że zbiór spójników jest zupełny. Dowód był indukcyjny: zdefiniowaliśmy sobie głębokość formuły i użyliśmy silniejszej zasady indukcji by pokazać, że dla każdej formuły dowolnej głębokości istnieje formuła jej równoważna, zapisana jedynie przy pomocy określonych spójników. Ostatnio dowiedziałem się, że niektórzy prowadzący mają problem z takim dowodem.

Jako, że czuję się odpowiedzialny za sposób który wam pokazałem, postanowiłem dowiedzieć się w czym leży problem. W tym celu rozmawiałem z niektórymi prowadzącymi, dowiadując się tego i owego, i postaram się przekazać wam tą wiedzę, byście nie czuli się oszukani, zrozumieli różnicę między tymi sposobami a także wiedzieli, którego sposobu użyć na kolokwium.

Ostrzegam, że notka może być dość długa, ale postaram się pisać zwięźle i zrozumiale. Podzielę ją też na podrozdziały, żebyście mogli w razie czego przeczytać tylko interesującą was część.

Indukcja po głębokości/wielkości

Prawdopodobnie wypadałoby powiedzieć to jasno: sposób który pokazywałem **to nie jest** indukcja strukturalna. Jest to indukcja **po głębokości** formuły. Choć w rzeczywistości nazwanie tego **głębokość** jest niedomówieniem. Trafniej byłoby to nazwać **wielkością** formuły. Fajnie byłoby zrozumieć różnicę:

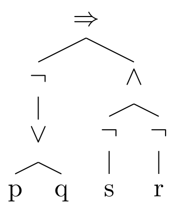
Definicja: Wielkość formuły

Niech $s(\varphi)$ (wielkość formuły φ) będzie zdefiniowane następująco:
$s(p) = 0$, gdzie p jest dowolną zmienną zdaniową
$s(\neg\varphi) = 1 + s(\varphi)$
$s(\varphi \vee \psi) = s(\varphi \wedge \psi) = s(\varphi \Rightarrow \psi) = s(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1 + s(\varphi) + s(\psi)$

Definicja: Głębokość formuły

Niech $d(\varphi)$ (głębokość formuły φ) będzie zdefiniowane następująco:
$d(p) = 1$, gdzie p jest dowolną zmienną zdaniową
$d(\neg\varphi) = 1 + d(\varphi)$
$d(\varphi \vee \psi) = d(\varphi \wedge \psi) = d(\varphi \Rightarrow \psi) = d(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1 + max\{d(\varphi), d(\psi)\}$

Wielkość formuły to tak naprawdę *liczba spójników* w formule, podczas gdy głębokość formuły to *wysokość drzewa* danej formuły. Spójrzmy na przykład:
$s((\neg(p \vee q)) \Rightarrow (\neg s \wedge \neg r)) = 6$, bo formuła ta ma 6 spójników.
$d((\neg(p \vee q)) \Rightarrow (\neg s \wedge \neg r)) = 4$, bo wysokość drzewa tej formuły wynosi 4:



Mając zdefiniowaną *głębokość* lub *wielkość* formuły, można przystąpić do dowodu indukcyjnego.

Dowód - indukcja po wielkości formuły

Spróbujmy pokazać, że zbiór spójników $\{\neg, \wedge\}$ jest zupełny.

Dowód. Skorzystamy z faktu, że zbiór spójników $\{\neg, \wedge, \vee\}$ jest zupełny. Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnej formuły φ zbudowanej ze spójników $\neg, \vee, \wedge$ oraz zmiennych zdaniowych istnieje formuła ψ taka, że $\varphi \equiv \psi$ oraz, że ψ jest zbudowana ze spójników $\neg, \wedge$ oraz zmiennych zdaniowych.

Wykorzystamy w tym celu zasadę indukcji, która mówi, że jeśli $X \subseteq \mathbb{N}$ oraz

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}(\forall_{i<n}\ i \in X \Rightarrow n \in X)$$

Wtedy $X = \mathbb{N}$

Zdefiniujmy najpierw zbiór X.

$X = \{n \in \mathbb{N}|$ dla każdej formuły wielkości n zapisanej przy użyciu zmiennych zdaniowych i spójników $\neg, \vee, \wedge$ istnieje formuła jej równoważna, zbudowana ze zmiennych zdaniowych i spójników $\neg, \wedge\}$

Spójrzmy na naszą zasadę indukcji. Żeby z niej skorzystać, musimy najpierw wziąć dowolne n. Weźmy więc dowolne $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $\forall_{i<n}\ i \in X$. Chcielibyśmy pokazać, że $n \in X$, to znaczy, że dla *każdej* formuły zbudowanej ze zmiennych zdaniowych i spójników $\neg, \vee, \wedge$ wielkości n, istnieje formuła jej równoważna, zbudowana ze spójników $\neg, \wedge$ i zmiennych zdaniowych. Weźmy więc dowolną formułę φ wielkości n zbudowaną ze spójników $\neg, \vee, \wedge$ i zmiennych zdaniowych. Rozpatrzmy przypadki:

- $\varphi = p$. Wtedy istnieje formuła $\psi = p$ taka, że $\varphi \equiv \psi$ oraz ψ jest zbudowana tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych.
- $\varphi = \bot$. Wtedy istnieje formuła $\psi = \neg p \wedge p$ taka, że $\varphi \equiv \psi$ oraz ψ jest zbudowana tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych.
- $\varphi = \top$. Wtedy istnieje formuła $\psi = \neg(\neg p \wedge p)$ taka, że $\varphi \equiv \psi$ oraz ψ jest zbudowana tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych.
- $\varphi = \neg\varphi_1$. Wiemy, że $n = s(\neg\varphi_1) > s(\varphi_1)$. Skoro tak, to z założenia indukcyjnego, istnieje formuła ψ_1 zbudowana tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych taka, że $\psi_1 \equiv \varphi_1$. W takim razie istnieje formuła $\psi = \neg\psi_1$ zbudowana tylko ze spójników $\wedge$ oraz $\neg$ i zmiennych zdaniowych, oraz taka, że $\psi \equiv \varphi$.
- $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Wiemy, że n=$s(\varphi_1 \wedge \varphi_2) > s(\varphi_1)$ oraz, że $n = s(\varphi_1 \wedge \varphi_2) > s(\varphi_2)$. Skoro tak, to z założenia indukcyjnego, istnieją formuły ψ_1 oraz ψ_2 zbudowane tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych takie, że $\psi_1 \equiv \varphi_1$ oraz $\psi_2 \equiv \varphi_2$. W takim razie istnieje formuła $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$ zbudowana tylko ze spójników $\wedge$ oraz $\neg$ i zmiennych zdaniowych, oraz taka, że $\psi \equiv \varphi$.
- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$. Wiemy, że $n = s(\varphi_1 \vee \varphi_2) > s(\varphi_1)$ oraz, że $n = s(\varphi_1 \vee \varphi_2) > s(\varphi_2)$. Skoro tak, to z założenia indukcyjnego, istnieją formuły ψ_1 oraz ψ_2 zbudowane tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych takie, że $\psi_1 \equiv \varphi_1$ oraz $\psi_2 \equiv \varphi_2$. W takim razie istnieje formuła $\psi = \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2) \equiv \psi_1 \vee \psi_2$ zbudowana tylko ze spójników $\wedge$ oraz $\neg$ i zmiennych zdaniowych, oraz taka, że $\psi \equiv \varphi$.

  Z tego wynika, że $n \in X$. W takim razie, na mocy zasady indukcji, każdą formułę dowolnej wielkości zbudowanej ze spójników $\neg$, $\wedge$, $\vee$ oraz zmiennych zdaniowych można zapisać używając tylko zmiennych zdaniowych i spójników $\wedge$ oraz $\neg$, co kończy dowód.

■

Dowód, który przeprowadziłem wyżej, jest już dość formalny i powinien zostać uznany. Są tu jednak pewne problematyczne momenty. Po pierwsze, zwróćmy uwagę na samą zasadę indukcji której musimy tu użyć. Ta "mocniejsza" zasada indukcji wymaga od nas ustalenia dowolnego n. Żeby pokazać, że $n \in X$, zakładamy, że wszystkie poprzednie liczby są już w zbiorze $\mathbb{N}$. Musimy także wziąć *dowolną* formułę. Jest to dość ważne, bo ponownie, nasz warunek mówi coś o *każdej* formule. Jeśli o tym zapomnimy, to nasz dowód nie będzie ścisły (czyli zapewne nie dostaniemy maksymalnej liczby punktów).

W samym dowodzie rozpatrujemy jakieś przypadki. Trzy pierwsze to "podstawa indukcji", ale w naszej indukcji nie mamy żadnej podstawy: pokazujemy coś dla dowolnego n. Przypadek, kiedy $n = 0$ rzeczywiście wymaga osobnego rozpatrzenia (bo nie korzystamy tam z założenia indukcyjnego).

Kolejny problem jaki się pojawia, to problem z samą definicją *wielkości/głębokości.* Musimy zdawać sobie sprawę z tego, że definicje te są dobre, to znaczy, że naprawdę możemy robić indukcję po wielkości czy głębokości. Innymi słowy, musimy zdawać sobie sprawę z tego, że $s(\varphi \oplus \psi) > s(\varphi)$, $s(\neg\varphi) > s(\varphi)$, $d(\varphi \oplus \psi) > d(\varphi)$, $d(\neg\varphi) > d(\varphi)$, gdzie $\oplus$ to dowolny spójnik logiczny. Dlaczego? Ponieważ, jeśli tak by nie było, to nie moglibyśmy korzystać z założenia indukcyjnego. Oczywiście, zarówno w przypadku wielkości jak i głębokości ten warunek zachodzi, ale należy zdawać sobie sprawę z tego, że **musi** on zachodzić.

Ostatecznie by uściślić taki dowód trzeba zrobić dość dużo, i brzmi to dość skomplikowanie. Dowód taki jest jak najbardziej poprawny, jednak musimy zdawać sobie sprawę z tego, że występują tam takie drobne problemy. Właśnie po to dano nam kolejną "maszynkę" - **indukcję strukturalną**

"Zwykła" indukcja

Zanim zaczniemy rozmawiać o indukcji strukturalnej, wypadałoby dobrze zrozumieć indukcję, której używaliśmy do tej pory. Przypomnijmy sobie pierwszą zasadę indukcji którą poznaliśmy.

Definicja: Zasada indukcji

Niech X będzie podzbiorem liczb naturalnych, takim, że

- $0 \in X$
- dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, jeśli $n \in X$ to $n + 1 \in X$

Wtedy $X = \mathbb{N}$

Definicja ta mówi coś o liczbach naturalnych. Liczby naturalne możemy zdefiniować indukcyjnie:

Definicja: Liczby naturalne

Zbiorem liczb naturalnych ($\mathbb{N}$) nazywamy najmniejszy zbiór taki, że:

- $0 \in \mathbb{N}$
- jeśli $n \in \mathbb{N}$ to $n + 1 \in \mathbb{N}$

Innymi słowy, 0 jest liczbą naturalną, a kolejne liczby buduje się dopisując do poprzedniej 1: $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, ...

W takim razie, jeśli zdefiniujemy sobie podzbiór zbioru liczb naturalnych, który zawiera 0, i dla każdej liczby n, jeśli n należy do tego zbioru to $n + 1$ też do niego należy, to wtedy z definicji, X musi być zbiorem liczb naturalnych.

Można powiedzieć, że zasada indukcji "buduje" nam ten zbiór. Pokazujemy, że $0 \in X$ oraz, że dodając do jakiegokolwiek elementu z X jedynkę, również otrzymamy element z X. Indukcja mówi nam, że w takim razie $0 \in X$, $0 + 1 = 1 \in X$, $1 + 1 = 2 \in X$, $2 + 1 = 3 \in X$, ...

Takie rozumienie zasady indukcji ułatwi sprawę, jeśli będziemy chcieli zrozumieć indukcję strukturalną.

Indukcja strukturalna

Przypomnijmy sobie definicję indukcji strukturalnej którą mamy zapisaną w whitebooku.

Definicja: Indukcja strukturalna dla rachunku zdań

Niech X będzie podzbiorem zbioru formuł rachunku zdań, że

- formuły $\top$ i $\perp$ należą do zbioru X
- każda zmienna zdaniowa należy do zbioru X
- jeśli ϕ, ϕ_1, ϕ_2 należą do zbioru X, to także $(\neg\phi), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \Rightarrow \phi_2), (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$ należą do zbioru X

Wtedy X jest zbiorem wszystkich formuł rachunku zdań.

Przypomnijmy też, czym są *formuły rachunku zdań*.

Definicja: Formuły rachunku zdań

- $\perp$ i $\top$ są formułami rachunku zdań
- zmienne zdaniowe są formułami rachunku zdań
- jeśli ϕ, ϕ_1, ϕ_2 są formułami rachunku zdań, to także $(\neg\phi), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \Rightarrow \phi_2), (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$ są formułami rachunku zdań
- Wszystkie formuły rachunku zdań można zbudować przy pomocy reguł opisanych w poprzednich punktach

Wygląda to podobnie jak w naszej pierwszej zasadzie indukcji. Zbiór wszystkich formuł rachunku zdań buduje się od podstaw: $\perp$, $\top$ i zmienne zdaniowe są formułami rachunku zdań. Kolejne formuły buduje się albo dopisując negację, albo "łącząc" dwie formuły przy pomocy spójnika $\vee, \wedge, \Rightarrow$ lub $\Leftrightarrow$.

Jeśli weźmiemy sobie podzbiór formuł rachunku zdań, do którego należą $\perp, \top$ i zmienne zdaniowe, oraz jeśli weźmiemy dowolne formuły ze zbioru X i połączymy je spójnikiem, lub dopiszemy do jakiejś formuły negację, i również otrzymamy coś ze zbioru X, to wtedy z definicji, zbiór X jest zbiorem wszystkich formuł rachunku zdań.

Definicja ta nie różni się od poprzedniej zasady indukcji tak bardzo, jak mogłoby się zdawać na pierwszy rzut oka. Również mamy jakąś podstawę, i również mamy jakiś "krok". Co jednak daje nam taka zasada indukcji? Spójrzmy na przykład dowodu.

Dowód - indukcja strukturalna

Spróbujmy pokazać, że zbiór spójników $\{\neg, \wedge\}$ jest zupełny.

Dowód. Skorzystamy z faktu, że zbiór spójników $\{\neg, \wedge, \vee\}$ jest zupełny. Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnej formuły φ zbudowanej ze spójników $\neg, \vee, \wedge$ oraz zmiennych zdaniowych istnieje formuła ψ taka, że $\varphi \equiv \psi$ oraz, że ψ jest zbudowana ze spójników $\neg, \wedge$ oraz zmiennych zdaniowych.

Wykorzystamy w tym celu zasadę indukcji strukturalnej

Zdefiniujmy najpierw zbiór X.

$$X = \{\varphi |\ \text{jeśli formuła } \varphi \text{ zapisana jest przy użyciu zmiennych zdaniowych i spójników } \neg, \vee, \wedge \\ \text{to istnieje formuła jej równoważna, zbudowana ze zmiennych zdaniowych i spójników } \neg, \wedge\}$$

Podstawa indukcji:

- Weźmy dowolną zmienną zdaniową p. Wtedy istnieje formuła $\psi = p$ taka, że $\varphi \equiv \psi$ oraz ψ jest zbudowana tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych, więc $p \in X$
- $\perp$. Wtedy istnieje formuła $\psi = \neg p \wedge p$ taka, że $\varphi \equiv \psi$ oraz ψ jest zbudowana tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych, więc $\perp \in X$
- $\top$. Wtedy istnieje formuła $\psi = \neg(\neg p \wedge p)$ taka, że $\varphi \equiv \psi$ oraz ψ jest zbudowana tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych, więc $\top \in X$.

Krok indukcyjny:

Załóżmy, że formuły $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ należą do zbioru X. Rozpatrzmy przypadki:

- $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ oraz $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ oczywiście należą do zbioru X, bo nie są formułami zbudowanymi jedynie ze zmiennych zdaniowych i spójników $\neg, \vee, \wedge$ (poprzednik implikacji w definicji zbioru X jest fałszywy).
- $\neg\varphi$. Wiemy, z założenia indukcyjnego, że $\varphi \in X$. Skoro tak, to istnieje formuła $\psi \equiv \varphi$ zbudowana jedynie ze zmiennych zdaniowych i spójników $\neg$ oraz $\wedge$. Wtedy istnieje formuła $\psi' = \neg\psi \equiv \neg\varphi$ która jest zbudowana tylko ze zmiennych zdaniowych i spójników $\neg$ oraz $\wedge$, więc $\neg\varphi \in X$
- $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Wiemy, z założenia indukcyjnego, że $\varphi_1 \in X$ i $\varphi_2 \in X$. W takim razie istnieją formuły ψ_1 oraz ψ_2 zbudowane tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych takie, że $\psi_1 \equiv \varphi_1$ oraz $\psi_2 \equiv \varphi_2$. Wtedy istnieje formuła $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2 \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ która jest zbudowana tylko ze spójników $\wedge$ oraz $\neg$ i zmiennych zdaniowych, więc $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in X$.
- $\varphi_1 \vee \varphi_2$. Wiemy, z założenia indukcyjnego, że $\varphi_1 \in X$ i $\varphi_2 \in X$. W takim razie istnieją formuły ψ_1 oraz ψ_2 zbudowane tylko ze spójników $\wedge, \neg$ i zmiennych zdaniowych takie, że $\psi_1 \equiv \varphi_1$ oraz $\psi_2 \equiv \varphi_2$. Wtedy istnieje formuła $\psi = \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2) \equiv \psi_1 \vee \psi_2 \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$ która jest zbudowana tylko ze spójników $\wedge$ oraz $\neg$ i zmiennych zdaniowych, więc $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in X$.

  W takim razie, na mocy zasady indukcji, zbiór X jest zbiorem wszystkich formuł.

■

Dowód ten nie różni się tak bardzo od dowodu który napisałem wcześniej. Tym razem nie musimy jednak myśleć o głębokościach, nie musimy też zastanawiać się czy użyte przez nas definicje są poprawne, czy też brać *dowolnych* formuł. Dowód ten jest trochę krótszy, łatwiejszy do zapisania i zapewne czytelniejszy. Podobnie jak zawsze mamy podstawę indukcji, mamy krok indukcyjny, a w kroku indukcyjnym pokazujemy formułę ψ która jest równoważna rozważanej przez nas formule, i która spełnia warunek - zapisana jest tylko przy pomocy spójników $\neg, \wedge$ i zmiennych zdaniowych.

Jedyny moment, kiedy możemy się nad czymś zastanowić, to gdy bierzemy formuły $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ oraz $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Nasza zasada indukcji mówi, że musimy pokazać, że również te formuły są w zbiorze X. Jednak nasz zbiór X mówi, że interesują nas tylko formuły zbudowane ze zmiennych zdaniowych i spójników $\wedge, \vee, \neg$. Dlatego w definicji zbioru pojawiła się implikacja: **jeśli** formuła jest zbudowana ze zmiennych zdaniowych i spójników $\wedge, \vee, \neg$. Skoro formuły $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ oraz $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ nie spełniają tego warunku, to implikacja będzie zawsze prawdziwa, więc te formuły oczywiście należą do zbioru X. Innymi słowy, mówimy, że do naszego zbioru X należą wszystkie interesujące nas formuły spełniające pewien warunek, oraz wszystkie formuły nas nie interesujące - w ten sposób pokazujemy, że X jest zbiorem wszystkich formuł.

Dość duże znaczenie ma więc początek. Wiemy, że jeśli formuła nie jest zapisana przy pomocy spójników $\wedge, \vee, \neg$ oraz zmiennych zdaniowych, to możemy ją zapisać właśnie przy pomocy tych spójników i zmiennych zdaniowych - bo zbiór $\{\wedge, \vee, \neg\}$ jest zupełny. Weźmy więc dowolną formułę $\varphi = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$. Dla tej formuły istnieje formuła $\psi \equiv \varphi$, zapisana przy pomocy spójników koniunkcji, negacji, alternatywy i zmiennych zdaniowych. W takim razie ta formuła już spełnia poprzednik implikacji, a z naszego dowodu wynika, że w takim razie istnieje formuła $\psi' \equiv \psi$ zapisana tylko przy pomocy negacji, koniunkcji i zmiennych zdaniowych. Ta formuła jest też równoważna formule φ - czyli, dla tej formuły również istnieje formuła jej równoważna zapisana przy użyciu spójników koniunkcji, negacji i zmiennych zdaniowych.

Zrozumienie tego, że możemy w ten sposób definiować nasze zbiory, by uniknąć rozpatrywania wszystkich przypadków sprawia, że z indukcji strukturalnej można korzystać równie sprawnie co z indukcji po głębokości. Musimy mieć jednak pewność, że rzeczywiście pokazujemy to co chcemy, i że rzeczywiście kończymy nasz dowód. Można powiedzieć, że sztucznie "wymuszamy", żeby w naszym zbiorze formuł były wszystkie formuły, sprawdzając tylko warunek dla formuł które nas interesują.

Indukcja po głębokości/wielkości a indukcja strukturalna - która?

Nie ważne jak dochodzimy do rozwiązania, jeśli nasze rozumowanie jest dostatecznie ścisłe i poprawne, nikt nie ma prawa nas ukarać, że użyliśmy takiej a nie innej zasady indukcji. Obie wymagają pewnego zrozumienia tego, co tak naprawdę robimy. Wszyscy prowadzący z którymi rozmawiałem stwierdzili, że nie będą ucinać punktów za to, że ktoś użył takiej a nie innej indukcji, jeśli tylko rozumowanie będzie poprawne.

Indukcja strukturalna jest "naturalna". W rzeczywistości indukcja na liczbach naturalnych jest indukcją strukturalną. Zrozumienie tej indukcji pomoże wam na Metodach Programowania, które czekają was w przyszłym semestrze. Jednak czasem definiowanie głębokości czy wielkości upraszcza nam rozumowanie. Niektórych rzeczy nie da się zrobić indukcją strukturalną - warto więc znać także indukcję po głębokości czy wielkości. Chciałbym też się trochę usprawiedliwić - nie zdawałem sobie sprawy z tego, że indukcja strukturalna jest "prostsza". Pokazałem wam taki a nie inny sposób rozwiązywania zadań z dwóch powodów: po pierwsze, to był sposób pokazany na wykładzie, a po drugie - ja sam zawsze go używałem. Uważałem ten sposób rozumowania za prostszy, za lepszy do zrozumienia i łatwiejszy do przyswojenia. Przyznaję się jednak do błędu, bo powinienem pokazać wam jak używać i jednej i drugiej. Nie powinienem także sugerować, że indukcja którą pokazywałem to indukcja strukturalna - a tak mogliście to odebrać. Przyznaję się do błędu, i w ramach pokuty stworzyłem tą notatkę, która, mam nadzieję, dość dokładnie wyjaśnia i jedną i drugą indukcję, i pozwoli wam *umiejętnie* używać obu - zdając sobie sprawę z tego, czego tak naprawdę używamy, i z czego tak naprawdę korzystamy.

Powtórzę jeszcze raz - na kolokwium nikt nie będzie was oceniał za to, którego sposobu użyjecie, ale za to, czy poprawnie przeprowadziliście rozumowanie. Czy wprowadzicie sobie głębokość czy nie, czy użyjecie indukcji strukturalnej czy nie - wszystko zależy od was. Jeśli dowód będzie ścisły, nikt się nie przyczepi. Warto jednak rozważyć użycie indukcji strukturalnej tam, gdzie jest to możliwe. Trudniej tam popełnić jakiś błąd, wynikający z niedopowiedzenia lub naszej nieuwagi.