Rozwiązanie zadania 78

Sławomir Górawski

20 marca 2020

Zadanie 78. Pokaż że dla każdego transducera Moore'a istnieje równoważny transducer Mealy'ego. Pokaż że dla każdego transducera Mealy'ego istnieje równoważny transducer Moore'a.

1. Weźmy dowolny transducer Moore'a T. Pokażemy, że da się skonstruować dla niego transducer Mealy'ego T' taki, że $f_{T'} = f_T$.

Idea rozwiązania opiera się na tym, że transducer Moore'a generuje słowa przy wchodzeniu do nowych stanów, a Mealy'ego – podczas przechodzenia z jednego stanu do drugiego. Jeśli mamy symbol a, który powoduje przejście ze stanu q_1 do q_2, to w transudcerze Moore'a wpływ na generowanie słowa ma q_2, a w Mealy'ego – q_1 i a. Można dla każdemu takiemu przejściu w transducerze Mealy'ego T' przypisać słowo generowane przez stan, w którym znalazłby się transducer Moore'a T po wykonaniu tego przejścia.

Formalnie: niech $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$. Zdefiniujmy $\sigma' : Q \times \Sigma \to \Sigma_1^*$ w następujący sposób: $\sigma'(q, a) = \sigma(\delta(a, q))$. Teraz możemy skonstruowac transducer Mealy'ego $T' = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma' \rangle$. Pokażemy indukcyjnie, że $f_{T'}(w) = f_T(w)$ dla każdego $w \in \Sigma^*$ o długości n, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Podstawa indukcji: weźmy $n = 0$, jedyne słowo długości 0 to ε, $f_{T'}(\varepsilon) = \varepsilon = f_T(\varepsilon)$. Krok indukcyjny: dla danego n załóżmy, że $f_{T'}(w) = f_T(w)$ dla każdego $w \in \Sigma^*$ długości n. Weźmy dowolne $v \in \Sigma^*$ długości $n + 1$. Następnie:

$$
\begin{aligned}
f_{T'}(v) &= f_{T'}(wa) && (a \in \Sigma) \\
&= (f_{T'}(w))\sigma'(\hat{\delta}(w, q_0), a) \\
&= (f_T(w))\sigma'(\hat{\delta}(w, q_0), a) && \text{(z założenia indukcyjnego)} \\
&= (f_T(w))\sigma(\delta(a, \hat{\delta}(w, q_0)) && \text{(z definicji } \sigma'\text{)} \\
&= (f_T(w))\sigma(\hat{\delta}(wa, q_0)) \\
&= f_T(wa) \\
&= f_T(v)
\end{aligned}
$$

Pokazaliśmy, że $f_{T'}(v) = f_T(v)$ dla każdego $v \in \Sigma^*$ długości n, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2. Weźmy dowolny transducer Mealy'ego T'. Pokażemy, że da się skonstruować dla niego transducer Moore'a T'' taki, że $f_{T''} = f_{T'}$.

Nawiązując do intuicji z a, q_1 i q_2 z poprzedniego punktu, potrzebujemy w q_2 „zakodować" informacje z a i q_1. Aby uzyskać poprawne działanie T'' w ogólnym przypadku, musimy rozszerzyć zbiór stanów T' o informacje dot. symboli, jakie zostały wczytane przy przejściu do danego stanu, a konkretnie – każdy stan T'' musi reprezentować to, jaki stan był wcześniej, jaki stan byłby w danym momencie w T' i jaki symbol wywołał przejście.

Formalnie: niech $T' = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q', q_0', \delta', \sigma' \rangle$. Wtedy $T'' = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q'', q_0'', \delta'', \sigma'' \rangle$, gdzie:

$$
\begin{aligned}
&Q'' = Q' \times Q' \times \Sigma \\
&q_0'' = \langle \_, q_0', \_ \rangle \\
&\delta''(a, \langle \_, q, \_ \rangle) = \langle q, \delta'(a, q), a \rangle \\
&\sigma''(\langle q, \_, a \rangle) = \sigma'(q, a)
\end{aligned}
$$

Konwencja: „_" oznacza dowolną wartość odpowiedniego typu, która nie jest istotna w danym kontekście.

Pokażemy indukcyjnie, że T'' i T' są równoważne.

Dowód. Podstawa indukcji – jak w punkcie 1. Krok indukcyjny: dla danego n załóżmy, że $f_{T'}(w) = f_T(w)$ dla każdego $w \in \Sigma^*$ długości n. Weźmy dowolne $v \in \Sigma^*$ długości $n + 1$. Następnie:

$$
\begin{aligned}
f_{T''}(v) &= f_{T''}(wa) && (a \in \Sigma) \\
&= (f_{T''}(w))\sigma''(\hat{\delta}''(wa, q_0)) \\
&= (f_{T'}(w))\sigma''(\hat{\delta}''(wa, q_0)) && \text{(z założenia indukcyjnego)} \\
&= (f_{T'}(w))\sigma''(\delta''(a, \hat{\delta}''(w, q_0)) \\
&= (f_{T'}(w))\sigma''(\delta''(a, \langle \_, \hat{\delta}'(w, q_0), \_ \rangle)) \\
&= (f_{T'}(w))\sigma''(\langle \hat{\delta}'(w, q_0), \_, a \rangle) && \text{(z definicji } \delta''\text{)} \\
&= (f_{T'}(w))\sigma'(\hat{\delta}(w, q_0), a) && \text{(z definicji } \sigma''\text{)} \\
&= f_{T'}(wa) \\
&= f_{T'}(v)
\end{aligned}
$$

Pokazaliśmy, że $f_{T''}(v) = f_{T'}(v)$ dla każdego $v \in \Sigma^*$ długości n, $n \in \mathbb{N}$. □