Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
Rozwiązanie zadania 74

Aleksander Czeszejko-Sochacki

29 marca 2020

Zadanie 74. Pokaż, że istnieje konfluentny język bezkontekstowy który nie jest jednostajnie konfluentny.

1 Definicje

O języku $A \subseteq \Sigma^*$ powiemy, że jest konfluentny, jeśli:

$$\forall_{w,v \in \Sigma^*} \exists_{x \in \Sigma^*} \forall_{y \in \Sigma^*} (wxy \in A \Leftrightarrow vxy \in A)$$

O języku $A \subseteq \Sigma^*$ powiemy, w kolejnych trzech zadaniach, że jest jednostajnie konfluentny, jeśli istnieje taka stała $c \in N$, że:

$$\forall_{w,v \in \Sigma^*} \exists_{x \in \Sigma^*} \forall_{y \in \Sigma^*} (|x| \leq c \wedge (wxy \in A \Leftrightarrow vxy \in A))$$

2 Przykład konfluentnego języka bezkontekstowego, który nie jest jednostajnie konfluentny

$$L_\phi = \{(a+b)^n b^n (a+b)^* \ dla \ n \in N\}$$

Ponadto, niech odtąd $L_\psi = \{(a+b)^n b^n \ dla \ n \in N\}$ oraz $\chi = (a+b)^*$. Oczywiście $L_\phi = L_\psi L_\chi$

3 Uzasadnienie

Pokażemy, że powyższy język jest bezkontekstowy, konfluentny i nie jest jednostajnie konfluentny.

Twierdzenie 1 (Bezkontesktowy)**.** *L jest językiem bezkontekstowym*

Dowód. Rozważmy następującą gramatykę:

$$\begin{array}{lcl} \langle \text{S} \rangle & \models & NR \\ \langle \text{R} \rangle & \models & UR \mid \varepsilon \\ \langle \text{U} \rangle & \models & a \mid b \\ \langle \text{N} \rangle & \models & UNb \mid \varepsilon \end{array}$$

Pokażmy, że $L_{\{S,R,U,N\}} = L_{phi}$.
Zauważmy, że nieterminal S nie występuje po prawej stronie żadnej z produkcji, zatem wystarczy udowodnić, że $L_\psi = L_{\{N,U\}}$ oraz $L_\chi = L_{\{R,U\}}$. Pierwsza równość (w skrócie): utrzymujemy niezmiennik: tyle samo liter b z prawej strony nieterminala N, co nieterminali U i innych liter w sumie z lewej strony nieterminala N, każdy nieterminal rozwijamy do dowolnej litery. Słowa są skończone, więc dochodzimy do produkcji N na ε, rozwijamy każdy nieterminal U i mamy wyraz postaci $(a+b)^n b^n$. Drugi fakt jest trywialny. □

Twierdzenie 2 (Konfluentny)**.** *L jest językiem konfluentnym*

Dowód.

Lemat 3. *Weźmy dowolne $u, w \in \Sigma^*$. BSO $|w| \geq |u|$. Połóżmy $x = b^{|w|}$. Oczywiście $x \in \Sigma^*$. Wtedy dla dowolnego $y \in \Sigma^*$*

$$wxy \in L_\phi \wedge uxy \in L_\phi$$

.

Dowód. Zauważmy, że $wx \in L_\psi$ ($|w|$ dowolnych liter, a następnie $|w|$ liter b) oraz $y \in L_\chi$, stąd naturalnie $wxy \in L_\phi$
Ponadto, niech $ux = uvz$, gdzie $|v| = |u|$. Wtedy $uv \in L_\psi$ oraz $zy \in L_\chi$, zatem $uvz \in L_\phi$.

□

Ponieważ zachodzi koniunkcja, tym bardziej zachodzi równoważność z definicji języka konfluentnego. □

Twierdzenie 4 (Nie jednostajnie konfluentny)**.** *L nie jest językiem jednostajnie konfluentnym*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że

1. L_ψ jest jednostajnie konfluentny
2. c - stała języka jednostajnie konfluentnego
3. k - najmniejsza liczba parzysta większa od c
4. $w = a^k, u = b^k$ - pewne słowa z Σ^*

Mamy dla $y = \varepsilon$ $wxy \notin L_\psi$ (bo po w musiałoby wystąpić k liter b, a $|xy| < k$) oraz $uxy \in L_\psi$ (bo $uxy = b^{k/2}b^{k/2}xy$). Wniosek: nie zachodzi równoważność z definicji wyrażenia jednostajnie konfluentnego. Sprzeczność, zatem L_ψ nie jest jednostajnie konfluentny. □