Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
Rozwiązanie zadania 15

Piotr Gdowski

28 marca 2020

Zadanie 15. Dodanie do definicji wyrażeń regularnych pozwolenia na użycie symbolu $\cap$, oznaczającego przekrój języków nie umożliwia reprezentowania nowych zbiorów, wyrażenia jednak stają się krótsze. Udowodnij, że użycie $\cap$ może wykładniczo skrócić wyrażenie.

Rozwiązanie Rozważmy ciąg słów zadany wzorem $w_1 = (a_0 a_1)^2$ oraz $w_n = (w_{n-1} a_n)^2 = ((...(a_0 a_1)^2 a_2)^2)...)^2 a_n)^2$. Najpierw pokażemy, że $|w_n|$ ma wykładniczą długość względem n, a następnie znajdziemy wyrażenie regularne korzystające z operacji przekroju, pozwalające wyrazić w_n w znacznie krótszej postaci.

Lemat 1 Pokażemy, że $|w_n| = \Theta(2^n)$.

$$|w_1| = |(a_0 a_1)^2| = |a_0 a_1 a_0 a_1| = 4 \tag{1}$$

$$|w_2| = |(w_1 a_2)^2| = |((a_0 a_1)^2 a_2)^2| = 2(|w_1| + 1) = 10 \tag{2}$$

Zatem

$$\begin{aligned} |w_n| = |(w_{n-1} a_n)^2| &= 2(|w_{n-1}| + 1) = 2(2(|w_{n-2}| + 1) + 1) = ... \\ &= \underbrace{2(...(2(2}_{\text{n dwójek}}(|a_0 a_1|) + 1)...)) = 2^n + O(2^n) = \Theta(2^n) \end{aligned} \tag{3}$$

Stąd wniosek, że $|w_n| = \Theta(2^n)$.

Konstrukcja krótszego wyrażenia regularnego Rozważmy ciąg wyrażeń regularnych (ϕ_n) zadany następująco:

$$\phi_1 = (a_0 a_1)^2 \tag{4}$$

$$\phi_n = (\phi_{n-1} a_n)^* \cap ((a_0 + ... + a_{n-1})^* a_n)^2 \tag{5}$$

Zauważmy, że dla zadanego n prawa strona iloczynu dopuszcza dokładnie 2 wystąpienia a_n oraz 2 dowolnej długości słowa złożone z $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, tymczasem po prawej stronie każde wystąpienie a_n poprzedzone jest wyrażeniem ϕ_{n-1}. Dzięki takiej konstrukcji ϕ_{n-1} wystąpi dokładnie 2 razy, przez co uzyskamy efekt podniesienia do kwadratu, dokładnie tak jak w wyrażeniu w_n.

Poprawność konstrukcji Pokażemy indukcyjnie, że $L_{\phi_n} = \{w_n\}$.

- Niech $n = 1$. Wówczas $\phi_1 = w_1$, zatem w szczególności $L_{\phi_1} = \{w_1\}$.
- Ustalmy $n \in \mathbb{N}$, takie że $n \geq 1$. Załóżmy, że $L_{\phi_n} = \{w_n\}$. Pokażemy, że $L_{\phi_{n+1}} = \{w_{n+1}\}$. Z definicji ciągu (ϕ_n) wiemy, że w wyrażeniu ϕ_{n+1} litera a_{n+1} może się pojawić dokładnie 2 razy, za każdym razem po wyrażeniu ϕ_n. Zatem

$$L_{\phi_{n+1}} = L_{(\phi_n a_{n+1})^2} \overset{ind.}{=} L_{(w_n a_{n+1})^2} = L_{w_{n+1}} = \{w_{n+1}\}, \tag{6}$$

  czyli konstrukcja jest poprawna.

Długość skonstruowanego wyrażenia Pokażemy, że $|\phi_n| = O(n^2)$. Mamy

$$|\phi_1| = |(a_0 a_1)^2| = 4 \tag{7}$$

$$|\phi_2| = |(\phi_1 a_2)^* \cap ((a_0 + a_1)^* a_2)^2| = 5 + 6 = 11 \tag{8}$$

Zatem

$$|\phi_n| = |(\phi_{n-1} a_n)^* \cap ((a_0 + ... + a_{n-1})^* a_n)^2| = |\phi_{n-1}| + 1 + O(n) = O(n^2) \tag{9}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że dla każdego n prawa strona wyrażenia ϕ ma rozmiar liniowy względem n, zatem całe wyrażenie rośnie kwadratowo względem n. Zatem w_n da się równoważnie przedstawić jako ϕ_n, zatem użycie $\cap$ może wykładniczo skrócić wyrażenie regularne, czego należało dowieść. ■