Zadanie 119. (trudne, za 2 punkty) Funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazywamy funkcją Conway'a jeśli istnieją liczby naturalne $p, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$ takie, że dla każdego n jeśli $n = k \ mod \ p$ to $f(n) = na_k/b_k$. Pokaż, że nie ma algorytmu, który dla danych $p, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$ odpowiedziałby, czy dla definiowanej przez te współczynniki funkcji Conway'a istnieje m takie, że $f^m(2) = 1$ gdzie f^m oznacza funkcję f złożoną m razy ze sobą.

masz. Minsky'ego $\leq_{red}$ 119

Maszyna Minsky'ego: zbiór stanów $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$

$\langle q_i, a, b\rangle \longrightarrow \langle q_j, a^{\pm 1}_{+0}, b^{\pm 1}_{+0}\rangle \qquad n = |Q|$

Przyjmijmy, że stan początkowy $\langle q_1, 0, 0\rangle$, stan końcowy $\langle q_0, 0, 0\rangle$
$\qquad 2 \qquad\qquad 1$

$\langle q_i, a, b\rangle \longrightarrow 2^i \cdot 3^a \cdot 5^b$

$\langle q_i, a, b\rangle \longrightarrow \langle q_j, a+1, b-1\rangle \quad j > i$

$2^i \cdot 3^a \cdot 5^b \longrightarrow 2^j 3^{a+1} \cdot 5^{b-1} = 2^i 3^a 5^b \cdot \frac{2^{j-i} 3}{5}$

$p = 2^n \cdot 3 \cdot 5$

$\underline{2^i \cdot 3^a \cdot 5^b} \equiv r \pmod{p}$

$1 \leq r \leq p \qquad$ dla $i < n$

$GCD(p, 2^i \cdot 3^a \cdot 5^b) = \underline{2^i \cdot 3^{\min(a,1)} \cdot 5^{\min(b,1)}}$

$\parallel$

$GCD(p, r)$

$2^i \cdot 3^5 \cdot 5^7 \longrightarrow 2^j \cdot 3 \cdots$

$a_r, b_r \quad (1 \leq r \leq p) \qquad 2^i \cdot 3^6 \cdot 5^8 \longrightarrow$

$f(n) = \frac{n a_r}{b_r} \iff$ Masz. Minskiego jest bity $\underline{\langle q_i, \min(a,1), \min(b,1)\rangle}$

$\downarrow \quad q_j, u_1, u_2 \in \{0, 1, -1\}$

$\langle q_j, \pm 1 / 0, \pm 1 / 0\rangle$

$f(n) = n \cdot 2^{j-i} \cdot 3^{u_1} \cdot 5^{u_2}$

$f^m(2) = 1 \iff$ masz. Minsky'ego zatrzymuje się po m krokach