Michał Wierzbicki 20 marca 2020

1 Treść zadania

78. Pokaż że dla każdego transducera Moore'a istnieje równoważny transducer Mealy'ego. Pokaż że dla każdego transducera Mealy'ego istnieje równoważny transducer Moore'a.

2 Rozwiązanie

Moore $\implies$ Mealy Niech $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$ będzie transducerem Moore'a z $f_T : \Sigma^* \to \Sigma_1^*$ zdefiniowaną jako $f_T(\epsilon) = \epsilon$ oraz $f_T(wa) = (f_T(w))\sigma(\hat{\delta}(wa, q_0))$.

Skonstruujemy transducer Mealy'ego $T' = \langle \Sigma', \Sigma_1', Q', q_0', \delta', \sigma' \rangle$. Niech $T' = \langle \Sigma' = \Sigma, \Sigma_1' = \Sigma_1, Q' = Q, q_0' = q_0, \delta' = \delta, \sigma' \rangle$, gdzie $\sigma'(q, a) = \sigma(\delta(q, a))$ wraz z funkcją $f_{T'}(wa) = (f_T(w))\sigma(\hat{\delta}(w, q_0), a)$.

Korzystając z indukcji pokażemy, że $f_T(w) = f_{T'}(w)$ dla dowolnego w.

- $w = \epsilon$
  $f_T(\epsilon) = \epsilon = f_{T'}(\epsilon)$
- Załóżmy, że dla dowolnego słowa w długości n zachodzi równość $f_T(w) = f_{T'}(w)(\star)$. Rozważmy wa takie, że $w \in \Sigma^*, |w| = n, a \in \Sigma$.

  Wtedy $f_{T'}(wa) = f_{T'}(w)\sigma'(\hat{\delta}(q_0, w), a) \overset{\star}{=} f_T(w)\sigma'(\hat{\delta}(q_0, w), a) \overset{z\ def.\ sigma'}{=} f_T(w)\sigma(\delta(\hat{\delta}(q_0, w), a)) \overset{z\ def.\ \hat{}}{=} f_T(w)\sigma(\hat{\delta}(q_0, wa)) = f_T(wa)$ co kończy naszą konstrukcję.

Mealy $\implies$ Moore Teraz, niech $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$ będzie transducerem Mealy'ego. Skonstruujemy transducer Moore'a $T' = \langle \Sigma', \Sigma_1', Q', q_0', \delta', \sigma' \rangle$. Niech $T' = \langle \Sigma' = \Sigma, \Sigma_1' = \Sigma_1, Q', q_0' = q_s, \delta', \sigma' \rangle$, gdzie

- $Q' = (Q \times \Sigma) \dot{\cup} q_s$,
- q_s jest nowym stanem początkowym, takim że $\delta'(q_s, a) = (q_0, a)$ dla $a \in \Sigma$,
- $\delta'((q, a), b) = (\delta(q, a), b)$,
- $\sigma' : Q \to \Sigma_1^*$, taka że $\sigma'((q, a)) = \sigma(q, a)$
  $\sigma'(q_s) = \epsilon$

Korzystając z indukcji pokażemy, że $f_T(w) = f_{T'}(w)$ dla dowolnego w.

- $w = \epsilon$
  $f_T(\epsilon) = \epsilon = f_{T'}(\epsilon)$

- Załóżmy, że dla dowolnego słowa w długości n zachodzi równość $f_T(w) = f_{T'}(w) (\ddagger)$. Rozważmy wa takie, że $w \in \Sigma^*, |w| = n, a \in \Sigma$.

  Lemat pomocniczy 1. *Chcemy pokazać, że* $\hat{\delta}'(q_s, wa) = (\hat{\delta}(q_0, w), a)$ *gdzie* $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.

  Dowód. Dowód będzie indukcyjny po długości słowa w.

  - $w = \epsilon$
    $\delta'(q_s, a) = (q_0, a) = (\delta(q_0, \epsilon), a))$
  - Załóżmy, że $\hat{\delta}'(q_s, wa) = (\hat{\delta}(q_0, w), a)$ $(\dagger)$
    Chcemy pokazać, że $\hat{\delta}'(q_s, wab) = (\hat{\delta}(q_0, wa), b)$, gdzie gdzie $w \in \Sigma^*, a, b \in \Sigma$.
    $\hat{\delta}'(q_s, wab) \overset{z\ def.\ \hat{}}{=} \delta'(\hat{\delta}'(q_s, wa), b) \overset{\dagger}{=} \delta'((\hat{\delta}(q_0, w), a), b) \overset{z\ def\ \delta'}{=} (\delta(\hat{\delta}(q_0, w), a), b) = (\hat{\delta}(q_0, wa), b)$

  □

  Wtedy otrzymujemy $f_{T'}(wa) = f_{T'}(w)\sigma'(\hat{\delta}'(q_s, wa)) \overset{\ddagger}{=} f_T(w)\sigma'(\hat{\delta}'(q_s, wa)) \overset{z\ lematu}{=} f_T(w)\sigma'((\hat{\delta}(q_0, w), a)) \overset{z\ def.\ \sigma'}{=} f_T(w)\sigma(\hat{\delta}(q_0, w), a)$
  co kończy nasze rozważania.