Michał Górniak

Zadanie 80. Pokaż że dla każdego n istnieje transducer Mealy'ego $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$ taki że $|Q| = |\Sigma| = n$ i że każdy transducer Moore'a równoważny T ma przynajmniej n^2 stanów.

Rozwiązanie. Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy transducer Mealy'ego $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$ następująco:

- $\Sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$,
- $\Sigma_1 = \{b_0, b_1, \ldots, b_{n^2-1}\}$,
- $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$,
- $\delta(a_j, q_i) = q_{(i+1) \bmod n}$,
- $\sigma(q_i, a_j) = b_{ni+j}$.

Zauważmy, że σ przyjmuje wszystkie n^2 wartości ze zbioru $\{b_0, b_1, \ldots, b_{n^2-1}\}$. Weźmy teraz dowolny transducer Moore'a $T' = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q', q_0', \delta', \sigma' \rangle$ równoważny T.

Weźmy dowolne $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ oraz $a_j \in \Sigma$. Z definicji δ otrzymujemy, że $\hat{\delta}(a_j^i, q_0) = q_i$. Zauważmy, że

$$f_T(a_j^{i+1}) = f_T(a_j^i a_j) = (f_T(a_j^i))\sigma(\hat{\delta}(a_j^i, q_0), a_j) = (f_T(a_j^i))\sigma(q_i, a_j) = (f_T(a_j^i))b_{ni+j}.$$

Możemy również zapisać podobne równanie dla T':

$$f_{T'}(a_j^{i+1}) = (f_{T'}(a_j^i))\sigma'(\hat{\delta}'(a_j^{i+1}, q_0')).$$

Z równoważności T oraz T' wynikają równości $f_T(a_j^{i+1}) = f_{T'}(a_j^{i+1})$ oraz $f_T(a_j^i) = f_{T'}(a_j^i)$. Wszystkie te cztery powyższe równości implikują, że:

$$\sigma'(\hat{\delta}'(a_j^{i+1}, q_0')) = b_{ni+j}.$$

Z powyższej obserwacji wynika, że $\sigma' : Q' \to \Sigma_1^*$ przyjmuje przynajmniej n^2 różnych wartości, co oczywiście implikuje, że $|Q'| \geqslant n^2$, co było do udowodnienia.