

# JFiZO

Michał Kucharczyk

April 2020

## 1 Zadanie nr 76

### 1.1 Treść

Pokaż że istnieje takie  $c > 0$ , że dla każdego  $m \in \mathbb{N}$  istnieją  $n > m$  i  $L \subseteq \Sigma^*$  takie, że minimalny DFA rozstrzygający  $L$  ma  $n$  stanów, zaś każdy DFA rozstrzygający  $L_{1/2}$  ma przynajmniej  $cn^2$  stanów.

### 1.2 Rozwiązanie

Dla ustalonego  $m$ , weźmy  $n > m$  – parzyste. Niech  $\Sigma = \{0, 1\}$  i  $L = \{w \in \Sigma^* : \#1(w) = n\}$  ( $\#1(w) :=$  liczba jedynek w słowie  $w$ , analogicznie będą oznaczał liczbę zer przez  $\#0(w)$ ).

$L$  jest regularny. DFA rozpoznający  $L$  może mieć  $n + 2$  stanów, reprezentujących liczbę jedynek słowa od 0 do  $n$  i jeden dodatkowy, mówiący, że liczba jedynek jest większa od  $n$ . Funkcja przejścia  $\delta$ , oraz zbiór stanów akceptujących określona jest w sposób naturalny.

Ustalone języki  $L$  oraz  $L_{1/2}$  to języki zależne od wyboru  $n$ , więc trafniejsza notacja byłaby  $L(n)$  oraz  $L_{1/2}(n)$ , lecz nie będę jej stosował dla przejrzystości rozwiązania. Skoro te języki, a także później zdefiniowany zbiór  $B$  są funkcjami zmiennej  $n$  to można mówić o ich asymptotycznym zachowaniu wprowadzając notację  $\Omega$ .

Lemat:

Każdy DFA rozpoznający  $L_{1/2}$  ma  $\Omega(n^2)$  stanów.

Dowód:

Weźmy dowolny DFA  $\mathcal{B}$  rozpoznający  $L_{1/2}$  i zbiór  $B = \{v_{ij} := 1^i 0^j : 2i + j < n\}$ .  $|B| = \Omega(n^2)$  (\*).

Zauważmy, że  $L_{1/2} = \{w \in \Sigma^* : \#0(w) + 2^* \#1(w) \geq n \wedge \#1(w) \leq n\}$ . Jest tak dlatego, że dowolne słowo  $v \in \Sigma^*$ , którego prefixem jest  $w$  i  $|v| = 2|w|$  ma maksymalnie  $\#0(w) + 2^* \#1(w)$  jedynek, a minimalnie  $\#1(w)$  (i może mieć dowolną pośrednią liczbę jedynek).

Analogicznie do dowodu poprzedniego lematu pokażę, że dla  $\langle i, j \rangle \neq \langle i', j' \rangle$

$\hat{\delta}(q_0, v_{ij}) \neq \hat{\delta}(q_0, v_{i'j'})$ , co wystarczy.

Zauważmy, że dla  $i < i'$   $\hat{\delta}(q_0, v_{ij}) \neq \hat{\delta}(q_0, v_{i'j'})$ . W przeciwnym wypadku mielibyśmy :

$$\hat{\delta}(q_0, 1^n 0^j) = \hat{\delta}(q_0, 1^{n-i} v_{ij}) = \hat{\delta}(q_0, 1^{n-i} v_{i'j'}) = \hat{\delta}(q_0, 1^{n-i+i'} 0^{j'})$$

$1^n 0^j \in L_{1/2}$ , a  $1^{n-i+i'} 0^{j'} \notin L_{1/2}$  (bo  $n - i + i' > n$ ) co daje sprzeczność.

Muszę więc tylko pokazać, że dla  $j < j'$   $\hat{\delta}(q_0, v_{ij}) \neq \hat{\delta}(q_0, v_{i'j'})$ . Znow, gdyby  $\hat{\delta}(q_0, v_{ij}) =$

$\hat{\delta}(q_0, v_{ij'})$  moglibyśmy dokleić słowo  $0^{n-j'-2i}$ . Wtedy:

$$\hat{\delta}(q_0, 1^i 0^j 0^{n-j'-2i}) = \hat{\delta}(q_0, v_{ij} 0^{n-j'-2i}) = \hat{\delta}(q_0, v_{ij'} 0^{n-j'-2i}) = \hat{\delta}(q_0, 1^i 0^{j'} 0^{n-j'-2i})$$

Słowo  $1^i 0^j 0^{n-j'-2i} = 1^i 0^{n+j-j'-2i} \notin L_{1/2}$ , ponieważ  $2i + n + j - j' - 2i = n + j - j' \not\geq n$ , natomiast słowo  $1^i 0^{j'} 0^{n-j'-2i} = 1^i 0^{n+j'-j'-2i} \in L_{1/2}$ , bo  $2i + n + j' - j' - 2i = n \geq n$  ( oraz  $i < n$ ), co znów prowadzi do sprzeczności. Stąd dowolnie wybrane  $\mathcal{B}$  rozpoznające  $L_{1/2}$  ma przynajmniej  $|B| = \Omega(n^2)$  stanów, co należało pokazać.

(\*)  $|B| = (n-1) + (n-3) + (n-5) + \dots + 3 + 1$

$2|B| + \frac{n}{2} = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$ , więc

$|B| = \frac{n(n-1)}{4} - \frac{n}{2} = \frac{n^2-3n}{4} > \frac{1}{5}n^2$  dla odpowiednio dużego  $n$ .