JFiZO 2020

Wojciech Pawlik

18 marca 2020

Zadanie 79. Pokaż, że jeśli $A \leq_{reg} B$ i B jest regularny to A też.

Idea dowodu: Za pomoca DFA rozpoznającego język B oraz transducera przetwarzającego słowa języka A na słowa języka B skonstruujemy DFA rozpoznający język A.

Rozwiązanie: B jest regularny, zatem istnieje DFA $\mathcal{B} = \langle \Sigma_1, Q_B, q_{B_0}, F_B, \delta_B \rangle$, który go rozpoznaje. Języki A i B są w relacji $A \leq_{reg} B$, zatem istnieje transducer Mealy'ego $T = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q_T, q_{T_0}, \delta_T, \sigma \rangle$, dla którego jest zdefiniowana odpowiednia funkcja $f_T : \Sigma^* \to \Sigma_1^*$ i zachodzi $\forall_{w \in \Sigma^*} w \in A \Leftrightarrow f_T(w) \in B$. Skonstruujemy DFA $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q_A, q_{A_0}, F_A, \delta_A \rangle$ w następujący sposób:

$$Q_A = Q_T \times Q_B$$

$$q_{A_0} = \langle q_{T_0}, q_{B_0} \rangle$$

$$F_A = \{\langle q_T, q_B \rangle : q_T \in Q_T \wedge q_B \in F_B \rangle\}$$

$$\delta_A(q_A, a) = \delta_A(\langle q_T, q_B \rangle, a) = \langle \delta_T(q_T, a), \hat{\delta}_B(q_B, \sigma(q_T, a)) \rangle$$

$$\hat{\delta}_A(\langle q_T, q_B \rangle, w) = \langle \hat{\delta}_T(q_T, w), \hat{\delta}_B(q_B, f_T(w)) \rangle$$

Transducer jest deterministycznym automatem, który wczytuje słowo z Σ^*, a na wyjściu zamiast rozstrzygnięcia czy słowo należy do pewnego języka zwraca słowo $f_T(w) \in \Sigma_1^*$. Każdemu stanowi transducera przypisany jest pewien ciąg znaków z alfabetu wyjściowego Σ_1. To przypisanie nazywa się σ. Słowo wyjściowe jest generowane na podstawie przebiegu transducera. Działanie DFA $\mathcal{A}$ polega na przetworzeniu słowa $w \in \Sigma^*$ przez transducer, a następnie zaakceptowanie go wtedy i tylko wtedy, gdy DFA $\mathcal{B}$ akceptuje słowo $f_T(w)$.

Pokażemy teraz, że $A = L_A$ To będzie oznaczać, że automat $\mathcal{A}$ poprawnie rozpoznaje słowa z A, czyli A jest językiem regularnym.

- $w \in A \Rightarrow \mathcal{A}$ akceptuje słowo w
  Skoro $w \in A$ to $f_T(w) \in B$. Zatem DFA $\mathcal{B}$ akceptuje w czyli $\hat{\delta}_B(q_{B_0}, f_T(w))$ jest stanem akceptującym. Stąd wiemy, że po wczytaniu słowa w automat $\mathcal{A}$ jest w stanie akceptującym, bo z definicji

  $$\hat{\delta}_A(\langle q_{T_0}, q_{B_0}\rangle, w) = \langle \hat{\delta}_T(q_{T_0}, w), \hat{\delta}_B(q_{B_0}, f_T(w))\rangle$$

  a stanami akceptującymi automatu $\mathcal{A}$ są wszystkie pary $\langle q_T, q_B\rangle$, dla których $q_B \in F_B$.

- $w \notin A \Rightarrow \mathcal{A}$ nie akceptuje słowa w
  Skoro $w \notin A$ to $f_T(w) \notin B$. Zatem $\hat{\delta}_B(q_{B_0}, f_T(w))$ nie jest stanem akceptującym. Stąd wiemy, że po wczytaniu słowa w automat $\mathcal{A}$ nie może być w stanie akceptującym co kończy dowód.