Michał Wierzbicki 3 kwietnia 2020
Zadanie 35.

1 Treść zadania

Zadanie 35. Język $L \subseteq \Sigma^*$ nazywany jest regularnym ideałem jeśli jest regularny i dla każdego słowa $w \in L$ i każdych słów $v, v' \in \Sigma^*$ zachodzi $vwv' \in \Sigma^*$.

a. Czy dla każdego automatu $\mathcal{A}$ i zbioru $\mathcal{S}$ zawartego w zbiorze stanów automatu $\mathcal{A}$ język $sync(S)$ jest regularny?

b. Czy dla każdego automatu $\mathcal{A}$ i zbioru $\mathcal{S}$ zawartego w zbiorze stanów automatu $\mathcal{A}$ język $sync(S)$ jest regularnym ideałem?

c. Czy dla każdego automatu $\mathcal{A}$ język $sync(Q)$ jest regularnym ideałem? (Q jest ponownie zbiorem stanów automatu $\mathcal{A}$).

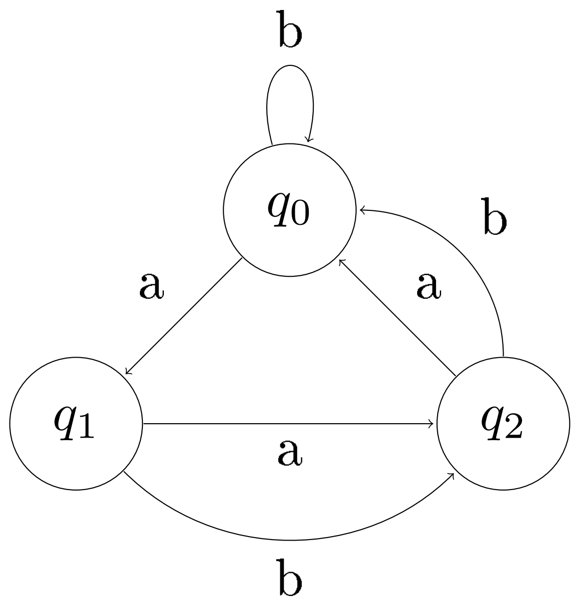
2 Rozwiązanie

a. Mając dany automat $\mathcal{A}$ i zbiory S i $sync(S)$ skonstruujemy automat $\mathcal{A}'$ rozpoznający $sync(S)$. Niech $S = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle$, wtedy $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', q_0', F', \delta'\rangle$ gdzie:

- Σ to alfabet zadany dla automatu $\mathcal{A}$
- $Q' = Q^{|S|}$ – stanami są krotki o n stanach
- $q_0' = \langle s_0, s_1, \ldots s_{n-1}\rangle$ – jest to krotka składająca się ze stanów ze zbioru S
- $F' = \{\langle q, q, \ldots q\rangle \ : q \in Q\}$ – zbiór stanów akceptujących jest zbiorem krotek (długości n) składających się z tego samego stanu q
- $\delta'(\langle q_1, q_2, \ldots, q_n\rangle, a) = \langle \delta(q_1, a), \delta(q_2, a), \ldots, \delta(q_n, a)\rangle$ – funkcja przejścia dla $\mathcal{A}'$ jest zdefiniowana następująco: przyjmuje krotkę długości n oraz literę $a \in \Sigma$. Krotkę wynikową otrzymujemy poprzez zastosowanie funkcji przejścia automatu $\mathcal{A}$ na każdej ze współrzędnych krotki wykorzystując literę a

Tak zdefiniowany automat akceptuje słowa, które synchronizują automat. Niech w będzie dowolnym słowem z $sync(S)$, wtedy
$\hat{\delta}'(q_0', w) = \hat{\delta}'(\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle, w) = \langle \hat{\delta}(s_0, w), \hat{\delta}(s_1, w), \ldots, \hat{\delta}(s_{n-1}, w)\rangle$. Zauważmy, że $\langle \hat{\delta}(s_0, w), \hat{\delta}(s_1, w), \ldots, \hat{\delta}(s_{n-1}, w)\rangle \in F' \Leftrightarrow \hat{\delta}(s_0, w) = \delta(s_1, w) = \ldots = \delta(s_{n-1}, w)$, czyli wtedy gdy każda współrzędna krotki to ten sam stan i automat został zsynchronizowany.

b. Rozważmy poniższy automat. Niech $S = \{q_0, q_2\}$. W $sync(S)$ znajduje się słowo b, dla którego $\hat{\delta}(q_0, b) = \hat{\delta}(q_2, b)$. Weźmy wv, v' pojawiające się w definicji regularnego ideału, niech$v = a, v' = \epsilon, w = b$, wtedy $vwv' = ab$. Zauważmy, że takie słowo nie synchronizuje automatu , więc $sync(S)$ nie jest regularnym ideałem.



c. Z **a.** wiemy, że $sync(Q)$ jest regularny. Weźmy dowolne $w \in sync(Q)$ oraz dowolne $v, v' \in \Sigma^*$. Pokażemy, że $vwv' \in sync(Q)$. Rozważmy dowolne $q, q' \in Q$. Zauważmy, że jeśli $\hat{\delta}(q, vw) = \hat{\delta}(q', vw)$, to $\hat{\delta}(q, vwv') = \hat{\delta}(q', vwv')$. Tak się dzieje, ponieważ w jest słowem z $sync(Q)$, czyli po jego przeczytaniu dla stanów q, q' automat będzie w tym samym stanie. Oznacza to, że od tego momentu będzie się zachowywał tak samo czytając dowolne v', niezależnie czy zaczęliśmy z q czy q'. Dokładniej mówiąc $\hat{\delta}(q, vw) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, v), w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q', v), w) = \hat{\delta}(q', vw)$. Zatem $\hat{\delta}(q, vwv') = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, vw), v') = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q', vw), v') = \hat{\delta}(q', vwv')$, więc $vwv' \in sync(Q)$.