# Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
# Zadanie 76

Maciej Walkowiak

**Treść**

Pokaż, że istnieje takie $c > 0$, że dla każdego $m \in N$ istnieją $n > m$ i $L \subseteq \Sigma^*$ takie, że minimalny DFA rozstrzygający $L$ ma $n$ stanów, zaś każdy DFA rozstrzygający $L_{1/2}$ ma przynajmniej $cn^2$ stanów.

**Rozwiązanie**

Wykażę, że istnieje stała $c$ taka, że dla $n = m + 2$ i $L = \{w : w \in \{0,1\}^*, |w|_1 = m\}$ warunki zadania są spełnione. Taki $L$ jest oczywiście regularny oraz minimalne DFA, które go rozstrzyga ma $n$ stanów (po jednym stanie na liczbę jedynek od 0 do $m$ oraz jeden na piekło żuczków dla $> m$ jedynek). Pozostaje wykazać, że minimalne DFA rozstrzygające $L_{1/2}$ ma przynajmniej $cn^2$ stanów.
Rozpatrzmy następujące zbiory: $A_{k,l} = \{w : w \in \{0,1\}^*, |w| = k, |w|_1 = l\}$. Wykażę, że w minimalnym DFA rozstrzygającym $L_{1/2}$ wyrazy należące do róznych zbiorów $A_{k,l}$ dla $0 \leq l \leq \lfloor m/2 \rfloor$, $l \leq k \leq m - l$ muszą mieć różne stany. Rozważmy dwa przypadki:
**1.** $w_1 \in A_{k_1,l_1}, w_2 \in A_{k_2,l_2}$, gdze $l_1 \neq l_2$ (mają różną liczbę jedynek).
Bez straty ogólności $l_1 > l_2$. Wówczas jeśli dokleimy do obu słów $m - l_2$ jedynek, to słowo powstałe z $w_2$ będzie mieć $m$ jedynek, więc będzie w $L_{1/2}$ (wystarczy dokleić do niego same 0 żeby było w $L$), a słowo powstałe z $w_1$ będzie miało $> m$ jedynek, czyli nie będzie w $L_{1/2}$. Dowodzi to, że muszą mieć one różne stany w DFA rozpoznającym $L_{1/2}$.
**2.** $w_1 \in A_{k_1,l}, w_2 \in A_{k_2,l}$, gdzie $k_1 \neq k_2$. (mają tę samą liczbę jedynek, ale różne długości)
Przypomnijmy, że $l \leq \lfloor m/2 \rfloor$, oraz $l \leq k_1, k_2 \leq m - l$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $k_2 > k_1$. Zauważmy, że jeśli dokleimy do obu słów $m - l - k_2$ zer (w szczególności może być ich 0), to słowo powstałe z $w_2$ będzie należeć do $L_{1/2}$ (będzie mieć $l$ jedynek i długość $m - l$, więc można dokleić $m - l$ jedynek żeby było w $L$), a słowo powstałe z $w_1$ nie będzie należeć do $L_{1/2}$ (będzie mieć $l$ jedynek i długość mniejszą niż $m - l$, więc nie da się dokleić do niego słowa o tej samej długości, by było $m$ jedynek). Dowodzi to, że słowa $w_1$ i $w_2$ muszą mieć rózne stany w DFA rozpoznającym $L_{1/2}$.

Wykazaliśmy więc, że słowa ze zbiorów $A_{k,l}$ dla $0 \leq l \leq \lfloor m/2 \rfloor$, $l \leq k \leq m - l$ muszą mieć różne stany. Oznacza to, że minimalne DFA rozpoznające $L_{1/2}$ musi mieć co najmniej $|\{(k,l) : 0 \leq l \leq \lfloor m/2 \rfloor, l \leq k \leq m - l\}|$. Liczbę tę można ograniczyć z dołu przez $cm^2$ dla pewnego $c$, zatem można to też ograniczyć przez $c'n^2$ dla pewnego $c'$ (bo $n = m + 2$ jest rzędu $m$), co kończy dowód.