Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa

Wojciech Jarząbek

20 marca 2020

Zadanie 23

Treść zadania

Załóżmy, że L jest pewnym językiem regularnym.
Czy język $L/2 = \{w : \exists v\ vw \in L \wedge |v| = |w|\}$ jest regularny?

Rozwiązanie

Niech $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ będzie DFA rozpoznającym L.
Niech $n = |Q|$ oraz $k = |v| = |w|$.

Intuicja: potrzebujemy wiedzieć, które stany są osiągalne z q_0 po wczytaniu k symboli z taśmy, a także – czy po wczytaniu słowa w znajdziemy się w stanie akceptującym.

Skonstruujmy automat $\tilde{A} = \langle \Sigma, \tilde{Q}, \tilde{q_0}, \tilde{F}, \tilde{\delta} \rangle$:

- $\tilde{Q} = Q^n \times 2^Q$
- $\tilde{q_0} = \langle \langle q_0, q_1, q_2, \cdots, q_{n-1} \rangle,\ \{q_0\} \rangle$
- $\tilde{F} = \{ \langle \langle f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{n-1} \rangle,\ T \rangle : \exists_{k<n}\ f_k \in F \wedge q_k \in T \}$
- $\tilde{\delta}(\langle S, T \rangle, a) = \langle \langle \forall_{s \in S}\ \delta(s, a) \rangle,\ \{ q \in Q : \exists_{t \in T, x \in \Sigma}\ \delta(t, x) = q \} \rangle$

Intuicja: stany $\tilde{A}$ to 2-krotki, których pierwszym elementem jest krotka kolejnych stanów, w których mógłby się znaleźć automat A poprzez wczytywanie słowa w, rozpoczynając od dowolnego stanu, zaś drugim – zbiór zawierający informacje o stanach z Q, w których mógłby się znaleźć automat A po przeczytaniu k symboli, rozpoczynając od q_0. Stan automatu $\tilde{A}$ jest akceptujący, jeżeli istnieje stan q_k taki, że po przeczytaniu słowa v automat A kończy w stanie q_k, stanem początkowym dla słowa w jest q_k, a po przeczytaniu w kończymy w stanie akceptującym dla automatu A.

Twierdzę, że zachodzi równoważność: $w \in L/2 \iff \tilde{A}$ akceptuje w. Dowód:

- $(\implies)$

  Weźmy $w \in L/2$, wtedy istnieje v takie, że $vw \in L/2$ oraz $|v| = |w|$. W automacie A istnieją zatem stany q_i, q_j takie, że $\hat{\delta}(q_0, v) = q_i$ oraz $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$, gdzie q_j jest stanem akceptującym. Oznacza to, że w i-tym kroku automatu $\tilde{A}$ stan q_i należy do zbioru T, gdyż istnieje ciąg liter, znany także jako v, który przechodzi stany $q_o \to q_i$. Skoro słowo zostało zaakceptowane w stanie końcowym q_j, istnieje stan $s_i \in S$, który kończy na q_j, czyli $\tilde{A}$ akceptuje słowo w.

- $(\impliedby)$

  Weźmy słowo długości k, które zostało zaakceptowane przez $\tilde{A}$. Zatem istnieje słowo v długości k takie, że po jego przeczytaniu automat A, zaczynając od q_0, znajdzie się w stanie q_i. Wiemy, że słowo w zostanie zaakceptowane przez automat A zaczynający od q_i, zatem $vw \in L$, zatem $w \in L/2$.

Ten akapit jest niejasny.

skąd to "Zatem". Czemu?

□

Rozwiązanie jest poprawne i raczej dobrze napisane. Ostatni akapit jest słabo napisany i nie widzę tam dowodu.
Z drugiej strony jest to łatwe do pokoazania z defini9cji, więc nie oczekuję poprawek.

Całe rozwiązanie byłoby łatwiejsze, gdyby zamiast DFA używać NDFA.