Języki formalne i złożoność obliczeniowa
zadanie 36

Agnieszka Pawicka

3 kwietnia 2020

Treść

zadanie 36

(a) Udowodnij, że jeśli S jest dwuelementowy i zbiór sync(S) jest niepusty, to zawiera on jakieś słowo o długości nie większej niż $|Q|^2$.

(b) Udowodnij, że jeśli zbiór sync(Q) jest niepusty, to zawiera on jakieś słowo o długości nie większej niż $|Q|^3$.

Definicja

Dla danego deterministycznego automatu skończonego
$A =< \Sigma, Q, q_0, F, \delta >$ i zbioru $S \subseteq Q$ przez sync(S) oznaczmy zbiór
$\{w \in \Sigma^* : \forall_{q,q' \in S} \hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q', w)\}$.

Oznaczenia

- Niech zbiór stanów S zawiera stany $q_1, q_2 \dots q_{|S|}$, $w \in \Sigma^*$. Niech $f(S, w)$ będzie krotką $|S|$-elementową $< \hat{\delta}(q_1, w), \hat{\delta}(q_2, w), \dots \hat{\delta}(q_{|S|}, w) >$.
  Zauważmy, że jeśli istnieje stan q, że $f(S, w) =< q, q, q, \dots q >$ to $w \in$ sync(S).
- Niech $pref(w_j)$ oznacza j-literowy prefiks słowa w.
- Niech $suf(w_j)$ oznacza sufiks słowa w zaczynający się od j-tej literki.

Rozwiązanie

Lemat (1)

Niech $x, y, z \in \Sigma^*$. Dla danego $S \subseteq Q$ jeśli $f(S, x) = f(S, xy)$ to $f(S, xz) = f(S, xyz)$.

dowód: Weźmy dowolne $q_i \in S$. Zauważmy, że

$$\hat{\delta}(q_i, x) = \hat{\delta}(q_i, xy) \Rightarrow \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_i, xy), z) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_i, x), z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\delta}(q_i, xyz) = \hat{\delta}(q_i, xz)$$

W takim razie równość będzie zachodziła dla wszystkich współrzędnych krotek $f(S, xz), f(S, xyz)$ co kończy dowód.

Lemat (2)

Niech w będzie najkrótszym słowem należącym do sync(S). W ciągu $f(S, pref(w_0)), f(S, pref(w_1)), \dots f(S, w)$ wszystkie krotki są parami różne.

dowód: Załóżmy, że istnieją takie $i < j$, że $f(S, pref(w_i)) = f(S, pref(w_j))$. Wtedy z lematu (1):

$$f(S, w) = f(S, pref(w_i)suf(w_{j+1})),$$

zatem słowo $pref(w_i)suf(w_{j+1})$ rózwnież należy do sync(S) i jest krótsze niż w.

Rozwiązanie (a)

Z lematu (2) wiemy, że dla najkrótszego słowa $w \in$sync(S) zachodzi

$$\forall_{i \neq j} f(S, pref(w_i)) \neq f(S, pref(w_j))$$

W takim razie policzmy, ile jest różnych wartości może przyjmować $f(S, v)$ dla ustalonego S. Jako, że $|S| = 2$, musimy policzyć ile jest różnych par stanów z Q. Takich par jest nie więcej niż $|Q|^2$, co kończy dowód.

Lemat (3)

Jeśli dla danego słowa w, danej długości prefiksu x oraz stanów $q_i \neq q_j$ zachodzi

$$\hat{\delta}(q_i, pref(w_x)) = \hat{\delta}(q_j, pref(w_x))$$

to zachodzi również

$$\forall_{y \geq x} \hat{\delta}(q_i, pref(w_y)) = \hat{\delta}(q_j, pref(w_y))$$

Innymi słowy, jeśli mamy dowolne słowa $x, y \in \Sigma^*$ i $f(S, x)$ przyjmuje te same wartości na i-tej i j-tej współrzędnej to $f(S, xy)$ również przyjmuje te same wartości na i-tej i j-tej współrzędnej.

dowód: Zauważmy, że

$$\hat{\delta}(q_i, x) = \hat{\delta}(q_j, x) \Rightarrow \forall_{y \in \Sigma^*} \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_i, x), y) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_j, x), y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall_{y \in \Sigma^*} \hat{\delta}(q_i, xy) = \hat{\delta}(q_j, xy)$$

Lemat(4)

Dla zbioru $Q = \{q_1, q_2 \dots q_{|Q|}\}$ dla każdego $k \leq |Q|$ istnieje $v \in \Sigma^*, |v| \leq k|Q|^2$ takie, że $v \in sync(\{q_1, q_2 \dots q_k\})$.

dowód przez indukcję po k :

dla k=1:
Niech $v \in sync(\{q_1, q_2\})$ $|v| \leq |Q|^2$. Z (a) wiemy, że takie słowo istnieje.

dla $k > 1$:

ZI: założmy, że dla każdego $n < k$ istnieje $v \in \Sigma^*, |v| \leq n|Q|^2$ takie, że $v \in sync(\{q_1, q_2 \dots q_n\})$.

TI: istnieje $v \in \Sigma^*, |v| \leq k|Q|^2$ takie, że $v \in sync(\{q_1, q_2 \dots q_k\})$.

dowód:

Niech najkrótszym słowem z $sync(\{q_1, q_2 \dots q_{k-1}\})$ będzie v ($|v| \leq (k-1)|Q|^2$ z ZI). Wtedy dla pewnego q:

$$f(\{q_1, q_2 \dots q_{k-1}\}, v) = < q, q, q \dots q >$$

Niech $q' = \hat{\delta}(q_k, v)$.
Niech w będzie najkrótszym słowem z $sync(\{q, q'\})$. Z (a) wiemy, że $|w| \leq |Q|^2$. Zauważmy, że $|vw| \leq k|Q|^2$
Z lematu (3) $vw \in sync(\{q_1, q_2 \dots q_{k-1}\})$.
Łatwo zaobserwować, że

$$f(\{q_1, q_2 \dots q_{k-1}\}, vw) = < \hat{\delta}(q, w), \dots \hat{\delta}(q, w) >$$

oraz że

$$\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q_k, vw)$$

.
Zatem $vw \in sync(\{q_1, q_2 \dots q_k\})$.

Rozwiązanie (b)

Wystarczy skorzystać z lematu (4) dla $k = |Q|$.