Oskar Wieczorek, i263984

Zadanie 36

a. Udowodnij, że jeśli S jest dwuelementowy i zbiór $sync(S)$ jest niepusty, to zawiera on jakieś słowo o długości nie większej niż $|Q|^2$.
b. Udowodnij, że jeśli zbiór $sync(Q)$ jest niepusty, to zawiera on jakieś słowo o długości nie większej niż $|Q|^3$.

Rozwiązanie

Twierdzenie (A). *Jeśli zbiór S jest dwuelementowy, a zbiór $sync(S)$ niepusty, to zawiera on jakieś słowo o długości nie większej niż $|Q|^2$.*

Dowód (nie wprost). Niech $S = \{s_1, s_2\}$ oraz $sync(S) \neq \varnothing$. Załóżmy, że dla każdego słowa w z $sync(S)$, $|w| > |Q|^2$. Niech $v = a_1 a_2 \dots a_m$ będzie najkrótszym słowem z $sync(S)$ (takie słowo istnieje, bo $sync(S)$ jest niepusty). Z założenia wiemy, że $m > |Q|^2$. Dla $i = 1, 2, \dots, m$ zdefiniujmy słowa v_i oraz pary p_i następująco:

$$v_i = a_1 a_2 \dots a_i$$
$$p_i = \left\langle \hat{\delta}(s_1, v_i), \hat{\delta}(s_2, v_i) \right\rangle$$

Ponieważ jest m par p_i i każda z nich może przyjąć jedną z $|Q|^2$ wartości oraz $m > |Q|^2$, to z *Zasady Szufladkowej* wiemy, że istnieją takie różne $j, k \in \{1, \dots, m\}$, że $p_j = p_k$. Zatem $\hat{\delta}(s_1, v_j) = \hat{\delta}(s_1, v_k)$ oraz $\hat{\delta}(s_2, v_j) = \hat{\delta}(s_2, v_k)$. Załóżmy (B.S.O.), że $j < k$. Rozpatrzmy słowo:

$$w' = v_j a_{k+1} \dots a_m$$

Ponieważ $j < k$, to w' można utworzyć z w wykreślając niepuste podsłowo $a_{j+1} \dots a_k$, zatem $|w'| < |w|$. Zauważmy, że:

$$\hat{\delta}(s_1, w') = \hat{\delta}(s_1, v_j a_{k+1} \dots a_m) = \hat{\delta}(s_1, v_k a_{k+1} \dots a_m) = \hat{\delta}(s_1, w)$$
$$\hat{\delta}(s_2, w') = \hat{\delta}(s_2, v_j a_{k+1} \dots a_m) = \hat{\delta}(s_2, v_k a_{k+1} \dots a_m) = \hat{\delta}(s_2, w)$$

Zatem $\hat{\delta}(s_1, w') = \hat{\delta}(s_1, w) = \hat{\delta}(s_2, w) = \hat{\delta}(s_2, w')$, więc $w' \in sync(S)$. Ale ponieważ $|w'| < |w|$, to w nie jest najkrótszym słowem z $sync(S)$. ↯ $\square$

Twierdzenie (B). *Jeśli zbiór $sync(Q)$ jest niepusty, to zawiera on jakieś słowo o długości nie większej niż $|Q|^3$.*

Dowód. Pokażemy konstrukcję słowa $w \in sync(Q)$, takiego że $|w| \leqslant |Q|^3$. Zdefiniujmy najpierw klasę funkcji pomocniczych $\delta_v : Q \to Q$ opisanych wzorem $\delta_v(q) = \hat{\delta}(q, v)$. Przez $f[\,A\,]$ będziemy oznaczać obraz zbioru A przez funkcję f.

Dane:
DFA $A = \left\langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \right\rangle$, taki że, $sync(Q) \neq \varnothing$.

Algorytm wyznaczania słowa $w \in sync(Q)$, takiego, że $|w| \leqslant |Q|^3$:

1. $w \leftarrow \epsilon$
2. $Q' \leftarrow Q$
3. **While** $|Q'| \geqslant 2$:
   - 3.1. $s_1, s_2 \leftarrow$ dwa dowolne stany z Q'
   - 3.2. $v \leftarrow$ słowo z $sync(\{s_1, s_2\})$, takie że $|v| \leqslant |Q|^2$
   - 3.3. $w \leftarrow wv$
   - 3.4. $Q' \leftarrow \delta_v[\,Q'\,]$
4. Zwróć w

Lemat (1)**.** *Algorytm zatrzymuje się.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $|Q| = 1$, to algorytm zatrzyma się, gdyż pętla *While* nie zostanie wykonana ani razu. Dla $|Q| \geqslant 2$ pokażemy, że moc zbioru Q' maleje w kolejnych iteracjach pętli. Z Twierdzenia A wiemy, że instrukcja 3.2 wykona się, gdyż zbiór $\{s_1, s_2\}$ jest dwuelementowy, a $sync(\{s_1, s_2\})$ niepusty (bo $sync(Q) \subseteq sync(\{s_1, s_2\})$ i $sync(Q) \neq \varnothing$). Ponieważ $\delta_v[\,Q'\,]$ jest obrazem zbioru skończonego więc $|Q'| \geqslant |\delta_v[\,Q'\,]|$. Dodatkowo, ponieważ s_1 i s_2 należą do Q' i $\delta_v(s_1) = \delta_v(s_2)$, więc funkcja δ_v na elementach zbioru Q' nie jest różnowartościowa. A więc $|Q'| > |\delta_v[\,Q'\,]|$.

Lemat (2)**.** *Pętla While wykona się co najwyżej $|Q| - 1$ razy.*

Dowód. Zauważmy, że w dowolnym momencie działania algorytmu $|Q'| \geqslant 1$, ponieważ Q' jest albo niepustym zbiorem Q (w instrukcji 1) albo obrazem jakiegoś niepustego zbioru (w instrukcjach 3 i 4). Ponieważ po każdej iteracji pętli moc zbioru Q' maleje i pętla kończy się, gdy $|Q| = 1$, więc może się ona wykonać co najwyżej $|Q| - 1$ razy.

Lemat (3)**.** *Algorytm zwraca $w \in sync(Q)$, takie że $|w| \leqslant |Q|^3$.*

Dowód. Niech k będzie liczbą iteracji pętli *While*. Zauważmy, że w jest postaci $v_1 \dots v_k$, gdzie v_i oznacza wartość zmiennej v w i-tej iteracji pętli $While$. Zauważmy też, że $\delta_w[\,Q\,]$ jest 1-elementowy, ponieważ:

$$\delta_w[\,Q\,] = \delta_{v_1 \dots v_k}[\,Q\,] = (\delta_{v_k} \circ \dots \circ \delta_{v_2} \circ \delta_{v_1})[\,Q\,],$$

co jest równe Q' po wykonaniu algorytmu. Zatem dla każdych $q_1, q_2 \in Q$ zachodzi $\hat{\delta}(q_1, w) = \hat{\delta}(q_2, w)$. A więc $w \in sync(Q)$. W dodatku, ponieważ $w = v_1 \dots v_k$ i $v_i \leqslant |Q|^2$ (instrukcja 3.2) oraz z Lematu 3 wiadomo, że $k \leqslant |Q| - 1$, to $|w| \leqslant |Q|^2 \cdot (|Q| - 1) \leqslant |Q|^3$.

Ponieważ istnieje poprawny algorytm wyznaczający słowo z $sync(Q)$ o długości nie większej niż $|Q|^3$, więc takie słowo istnieje. □