Sławomir Górawski

Zadanie 77. Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie CFL. Czy wynika z tego, że $L_{3/4}$ jest CFL?

Nie. Rozwiązanie opiera się na intuicji, że wiele języków, w których długości co najmniej 3 różnych wystąpień symboli są ze sobą związane, nie jest CFL (np. $\{a^n b^n a^n : n \in \mathbb{N}\}$). $L_{3/4}$ rozumiemy jako język taki że dla każdego $w \in L_{3/4}$ możemy znaleźć $v \in \Sigma^*$, dla którego $|v| = |w|/3$ i $wv \in L$. Niech:

$$L = \{a^n b^m a^m b^n : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

L jest CFL, ponieważ istnieje generująca go CFG:

$$\begin{aligned} S &\to aSb \mid T \\ T &\to bTa \mid \varepsilon. \end{aligned}$$

Wtedy:

$$L_{3/4} \supset \{a^n b^m a^{(m+n)/2} : n, m \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant m\}.$$

(Do $L_{3/4}$ należą też słowa z b na końcu, dla $n > m$, ale nie są one istotne dla tego rozwiązania.) Pokażemy, że $L_{3/4}$ nie jest CFL.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $L_{3/4}$ jest CFL. Użyjemy lematu o pompowaniu dla CFL. Niech p – stała z lematu. Weźmy $s = a^p b^p a^p$. $s \in L_{3/4}$. Niech $s = uvwxy$ tak że $|vx| \geqslant 1$ i $|vwx| \leqslant p$. Mamy dwie możliwości:

1. vwx zawiera się w pierwszych $2/3$ s. Wtedy możemy usunąć v oraz x z s, otrzymując $uwy = a^{p-i} b^{p-j} a^p$, gdzie $i + j \geqslant 1$. Z lematu $uwy \in L_{3/4}$, więc musi być prawdziwa równość:

$$\begin{aligned} (p - i + p - j)/2 &= p \\ 2p - i - j &= 2p \\ i + j &= 0, \end{aligned}$$

   co daje sprzeczność.

2. vwx zawiera się w ostatnich $2/3$ s. Analogicznie jak w 1. bierzemy słowo $uwy = a^p b^{p-i} a^{p-j}$, gdzie $i + j \geqslant 1$. Z lematu $uwy \in L_{3/4}$. Teraz mamy do rozpatrzenia:

   (a) $i > 0$. Wtedy symboli b jest mniej niż symboli a przed nimi, więc uwy nie może należeć do $L_{3/4}$, co daje sprzeczność.

   (b) $i = 0$. Wtedy $j \geqslant 1$ oraz musi zachodzić:

$$\begin{aligned} (p + p)/2 &= p - j \\ j &= 0, \end{aligned}$$

   co daje sprzeczność.

$\square$