Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
Sprawozdanie do zadania nr 73

Prowadzący: Jerzy Marcinkowski
Autor: Jacek Leja

Wrocław, 28 marca 2020

1. Treść zadania

Pokaż, że jeśli język regularny jest konfluentny, to jest jednostajnie konfluentny.

2. Rozwiązanie

2.1. Intuicja

Różnica pomiędzy konfluentością a jednostnajną konfluentnością jest taka, że w przypadku tego drugiego musi istnieć stała $c \in \mathbb{N}$ taka, że słowo x wybierane dla słów w, v jest krótsze od wartości c. W przypadku zwykłej konfluentności słowo x może być dowolnej, nieustalonej długości.

Jeżeli język L jest regularny, to wiemy, że istnieje DFA_L dla tego języka o skończonej liczbie stanów równej ilości klas abstrakcji relacji $\sim_L^{inf}$ (zgodnie z twierdzeniem o indeksie). Własność konfluentności języka L możemy przenieść również na DFA_L, wtedy dla dowolnych dwóch stanów w, v w DFA_L istnieje takie słowo $x \in \Sigma^*$, że dla dowolnego słowa $y \in \Sigma^*$ spełnione jest $(\hat{\delta}(w, xy) \in F \iff \hat{\delta}(v, xy) \in F)$. Zauważmy, że skoro liczba stanów w DFA_L jest skończona, to liczba różnych możliwych ścieżek z każdego stanu do innych w DFA_L również musi być skończona. Stąd możemy wywnioskować, że dla dowolnych dwóch stanów w, v musi istnieć skończone słowo x będące 'ścieżką' w DFA_L spełniajace wymogi konfluentności L, tym samym spełniając wymagania jednostajnej konfluentności L.

2.2. Konfluencja DFA_L

Dla dowolnego regularnego języka L istnieje $DFA_L = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ o skończonej liczbie stanów reprezentujący język L, co oznacza, że $\forall w \in \Sigma^* : (w \in L \iff \hat{\delta}(q_0, w) \in F)$. W związku z tym, możemy zastosować definicję konfluencji również dla DFA_L. Nastepujące formuły są równoważne:

1. $\forall w, v \in \Sigma^* : \exists x \in \Sigma^* : \forall y \in \Sigma^* : (wxy \in L \iff vxy \in L)$
2. $\forall w, v \in \Sigma^* : \exists x \in \Sigma^* : \forall y \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(q_0, wxy) \in F \iff \hat{\delta}(q_0, vxy) \in F)$
3. $\forall w, v \in Q : \exists x \in \Sigma^* : \forall y \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(w, xy) \in F \iff \hat{\delta}(v, xy) \in F)$
4. $\forall w, v \in Q : \exists x \in \Sigma^* : \forall y \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(\hat{\delta}(w, x), y) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(v, x), y) \in F)$

Oznacza to, że język regularny L jest konfluentny wtedy, i tylko wtedy, gdy w DFA_L dla dowolnych stanów $w, v \in Q$ istnieje słowo $x \in \Sigma^*$ doprowadzające w, v do stanów równoważnych, czyli takich, że dla dowolnego słowa $y \in \Sigma^*$ stan $\hat{\delta}(\hat{\delta}(w, x), y)$ jest akceptowany wtedy, i tylko wtedy, gdy stan $\hat{\delta}(\hat{\delta}(v, x), y)$ jest akceptowany.

Idąc krok dalej możemy również poszerzyć definicję jednostanej konfluencji: język regularny L jest jednostajnie konfluentny wtedy, i tylko wtedy, gdy dla DFA_L:

$$\forall w, v \in Q : \exists c \in \mathbb{N} : \exists x \in \Sigma^* : (|x| < c \wedge \forall y \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(\hat{\delta}(w, x), y) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(v, x), y) \in F)) \quad (1)$$

2.3. Dowód

Przeanlizujmy ponownie definicję konfluentności dla języka regularnego L. Zapiszmy krotkę $\langle w, v\rangle$, oznaczającą dwa dowolne stany w DFA_L. Wiemy, że istnieje wyraz x doprowadzający w, v do stanów rownoważnych, nazwijmy je $\langle x, y\rangle$. Zauważmy, że różnych dwuelementowych krotek stanów jest $|Q|^2$ i istnieje sekwencja krotek z $\langle w, v\rangle$ do $\langle x, y\rangle$, wynikająca z 'nakarmienia' stanów w, v wyrazem x. Zauważmy, że jeżeli w tej sekwencji którakolwiek z krotek powtarza się, to możemy usunąć wszystkie elementy w sekwencji pomiędzy pierwszym a drugim wystąpieniem tej krotki. Oznacza to, że jeżeli istnieje sekwencja stanów z $\langle w, v\rangle$ do $\langle x, y\rangle$, to musi istnieć równoważna sekwencja bez żadnych powtarzających się elementów. Ponieważ wiemy, że różnych krotek jest $|Q|^2$, to najkrótsza sekwencja dla dowolnych stanów w, v nie może być dłuższa niż $|Q|^2$. Tym samym dla dowolnych dwóch stanów w, v istnieje wyraz $x \in \Sigma^* < |Q|^2 + 1$ taki, że dla dowolnego słowa $y \in \Sigma^*$ spełnione jest $(\hat{\delta}(\hat{\delta}(w, x), y) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(v, x), y) \in F)$, co spełnią definicję jednostajnej konfluentności L.