

Zadanie 55

Czy zbiór takich słów nad alfabetem $\{0, 1\}$, które mają parzystą długość, i w których pierwszej połowie jest przynajmniej tyle samo jedynek, co w drugiej połowie, jest bezkontekstowy?

Rozwiązanie

Niech język ten nazywa się L . Pokażemy, że L nie jest bezkontekstowy.

Założmy że L jest bezkontekstowy. Niech p będzie stałą z lematu o pompowaniu dla języków bezkontekstowych. Weźmy słowo w takie, że:

$$w = 0^p 1^p 0^p 1^p = w_1 w_2 w_3 w_4,$$

gdzie $|w_1| = |w_2| = |w_3| = |w_4|$.

Widać, że $w \in L$. Weźmy dowolny podział w na $uvxyz$, zgodny z lematem o pompowaniu. Wtedy, ponieważ $|vxy| < p$ możliwe są następujące przypadki:

1. v lub y nachodzi na w_2

Jeśli weźmiemy słowo $w' = uv^0xy^0z$ to zmniejszy się liczba jedynek po lewej stronie, a po prawej się nie zmieni bo musielibyśmy odpompować więcej niż $2p$ znaków, żeby fragment w_4 przeszedł na lewą połowę. Więc $w' \notin L$. ⚡

2. v lub y nachodzi na w_4

Jeśli weźmiemy słowo $w' = uv^2xy^2z$, to liczba jedynek po prawej stronie się zwiększy, a po lewej pozostanie taka sama, ponieważ musielibyśmy dopompować co najmniej $2p$ znaków, żeby na pierwszą połowę przeszła jakaś jedynka, której tam nie było w w . ⚡

3. vxy mieści się w całości w w_1

Weźmy słowo $w' = uv^kxy^kz$, wtedy $w' = 0^{p+(k-1)*(|v|+|y|)}1^p0^p1^p$. Dla odpowiednio dużego k słowo to będzie miało same zera po lewej stronie więc nie będzie należeć do L . ⚡

4. vxy mieści się w całości w w_3

Jeśli weźmiemy słowo $w' = uv^0xy^0z$, w' jest krótsze od w , co oznacza że środek nam się przesunie w lewo, więc co najmniej jedna jedynka z lewej strony przejdzie na prawą, więc po prawej będzie więcej jedynek niż po lewej, czyli $w' \notin L$. ⚡¹

¹\usepackage{marvosym}; \raisebox{-2.5ex}{\Huge{\Lightning}}.