

Zadanie 55

GdziejestNemo?

30 marca 2020

Treść zadania

Czy zbiór takich słów nad alfabetem $\{0,1\}$, które mają parzystą długość, i w których pierwszej połowie jest przynajmniej tyle samo jedynek, co w drugiej połowie, jest bezkontekstowy?

Rozwiązanie

Nazwijmy język z zadania językiem L_z . Pokażę, że język L_z nie jest bezkontekstowy.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że język L_z jest językiem bezkontekstowym. Jeżeli L_z jest bezkontekstowy, wtedy jego przecięcie z językiem regularnym $\mathcal{L}(0^*1^*0^*1^*)$ również jest bezkontekstowe. Przy pomocy automatów rozpoznających te dwa języki można w naturalny sposób zdefiniować automat ze stosem, dla którego stanem będzie para stanów w dwóch automatach, sprawdzający przynależność słowa do przecięcia obu języków. W dalszej części rozumowania będziemy zatem rozpatrywać język $L = \mathcal{L}(0^*1^*0^*1^*) \cap L_z$.

L jest językiem bezkontekstowym a zatem zachodzi dla niego lemat o pompowaniu. Niech p będzie stałą z lematu o pompowaniu dla tego języka.

Popatrzmy na słowo $w = 0^{p+1}1^{p+1}0^{p+1}1^{p+1}$. Z lematu o pompowaniu wynika, że istnieją u, v, x, y, z , takie że spełnione są następujące zależności:

$$0^{p+1}1^{p+1}0^{p+1}1^{p+1} = uvxyz$$

$$|vy| > 0$$

$$|vxy| \leq p$$

$$\forall_i uv^i xy^i z \in L$$

Popatrzmy na możliwe postacie takiego podziału słowa w . Zauważmy, że aby słowa powstałe w wyniku pompowania mogły należeć do języka L , $|vy|$ musi być parzyste. Ponadto, aby pompowane słowo należało do $\mathcal{L}(0^*1^*0^*1^*)$, słowa v oraz y muszą zawierać same jedyne lub same zera.

1.

$$\begin{aligned}
 u &= 0^{p+1-a} \\
 vy &= 0^a 1^b \\
 |z| &\geq 2p+2 \\
 a+b &\leq p \\
 a &> 0
 \end{aligned}$$

Słowa takie mogą wyglądać w jeden z następujących sposobów:

$$\underbrace{0000\dots 0000}_u \underbrace{0000\dots 0000}_{vxy} \underbrace{\dots 00001^{p+1}0^{p+1}1^{p+1}}_z \text{ lub } \underbrace{0000\dots 0000}_u \underbrace{0000\dots 0000}_v \underbrace{\dots 000111\dots}_x \underbrace{1111\dots 1111}_y \underbrace{\dots 1110^{p+1}1^{p+1}}_z.$$

Popatrzmy na słowo $w' = uv^2xy^2z$. Połowa tego słowa występuje po $2p+2 + \frac{a+b}{2}$ -tym znaku.

W pierwszej połowie słowa w' jest $p+1+a$ zer , a w drugiej $p+1$. Ponieważ obie połówki mają tyle samo liter, zatem w pierwszej połowie jest mniej jedynek i $w' \notin L$.

$$w' = \underbrace{0000\dots 0000}_{p+1+a \text{ zer}} \underbrace{1111\dots 1111}_{p+1+\frac{b-a}{2} \text{ jedynek}} \mid \underbrace{1111\dots 1111}_{\frac{a+b}{2} \text{ jedynek}} \underbrace{0000\dots 0000}_{p+1 \text{ zer}} \underbrace{1111\dots 1111}_{p+1 \text{ jedynek}}$$

2.

$$\begin{aligned}
 u &= 0^{p+1}1^j \\
 vy &= 1^{2a} \\
 |z| &\geq 2p+2 \\
 2a+j &\leq p \\
 a &> 0
 \end{aligned}$$

Słowa takie będą wyglądały następująco

$$\underbrace{0^{p+1}111\dots}_{u} \underbrace{1111\dots 1111}_{vxy} \underbrace{\dots 1110^{p+1}1^{p+1}}_z.$$

Popatrzmy na słowo $w' = uv^0xy^0z$. Połowa tego słowa występuje po $2p+2-a$ -tym znaku.

W pierwszej połowie słowa w' jest $p+1-2a$ jedynek , a w drugiej $p+1$, zatem $w' \notin L$.

$$w' = \underbrace{0000\dots 0000}_{p+1 \text{ zer}} \underbrace{1111\dots 1111}_{p+1-2a \text{ jedynek}} \underbrace{000\dots 000}_a \mid \underbrace{0000\dots 0000}_{p+1-a \text{ zer}} \underbrace{1111\dots 1111}_{p+1 \text{ jedynek}}$$

3.

$$\begin{aligned}
u &= 0^{p+1}1^{p+1-a} \\
vy &= 1^a0^b \\
|z| &< 2p+2 \\
a+b &< p \\
a, b &> 0
\end{aligned}$$

Słowa takie będą wyglądać następująco:

$$\underbrace{0^{p+1}111\dots}_{u} \underbrace{111\dots111}_{v} \underbrace{\dots111000\dots}_{x} \underbrace{0000\dots0000}_{y} \underbrace{\dots0001^{p+1}}_{z}.$$

Popatrzmy na słowo $w' = uv^0xy^0z$. Połowa tego słowa występuje po $2p+2 - \frac{a+b}{2}$ -tym znaku.

Jeżeli $a \geq b$ wtedy pierwsza połowa słowa ma $p+1-a$ jedynek, a druga $p+1$ zatem takie $w' \notin L$.

$$w' = \underbrace{0000\dots0000}_{p+1 \text{ zer}} \underbrace{1111\dots1111}_{p+1-a \text{ jedynek}} \underbrace{000\dots000}_{a-\frac{a+b}{2} \text{ zer}} \mid \underbrace{0000\dots0000}_{p+1-a+\frac{a+b}{2} \text{ zer}} \underbrace{1111\dots1111}_{p+1 \text{ jedynek}}$$

Jeżeli $a < b$ wtedy pierwsza połowa słowa ma $p+1 - \frac{a+b}{2}$ jedynek, a druga $p+1 + \frac{a+b}{2} - a$ zatem także $w' \notin L$.

$$w' = \underbrace{0000\dots0000}_{p+1 \text{ zer}} \underbrace{1111\dots1111}_{p+1-\frac{a+b}{2} \text{ jedynek}} \mid \underbrace{111\dots111}_{\frac{a+b}{2}-a \text{ jedynek}} \underbrace{0000\dots0000}_{p+1-b \text{ zer}} \underbrace{1111\dots1111}_{p+1 \text{ jedynek}}$$

4.

$$\begin{aligned}
z &= 0^{p+1-2a}1^{p+1} \\
vy &= 0^{2a} \\
|u| &\geq 2p+2 \\
2a &< p \\
a &> 0
\end{aligned}$$

Przypadek symetryczny do przypadku 2.

5.

$$\begin{aligned}
z &= 1^{p+1-b} \\
vy &= 0^a1^b \\
|u| &\geq 2p+2 \\
a+b &< p \\
a &> 0
\end{aligned}$$

Przypadek symetryczny do przypadku 1.

□

Zatem dla dowolnego podziału słowa w nie jest spełniony lemat o pompowaniu, więc język L nie jest bezkontekstowy.