

1 Treść zadania

Zadanie 16. Czy istnieje wyrażenie regularne ϕ , oznaczające jakiś niepusty język regularny, takie że $L_{a\phi} = L_{\phi b}$? Czy istnieje wyrażenie regularne ϕ , oznaczające jakiś niepusty język regularny, takie że $L_{a^*\phi} = L_{\phi b^*}$?

2 Rozwiązanie

$L_{a\phi} = L_{\phi b}$ W treści pytania o tę równość pojawiają się dwa języki, $L_{a\phi}$ oraz $L_{\phi b}$. Pierwszy z nich to język słów generowanych przez jakieś wyrażenie regularne ϕ z doklejoną literą a na początku każdego z nich. Natomiast drugi język opisuje wszystkie słowa, które można wyprodukować z wyrażenia regularnego ϕ , z tym że w tym przypadku na końcu każdego z nich doklejona jest literka b . Na początku zauważmy, że aby równość $L_{a\phi} = L_{\phi b}$ zachodziła, to ϕ musi spełniać dwa warunki:

1. Słowa produkowane przez ϕ muszą zaczynać się na literę a , tak aby słowa z $L_{\phi b}$ znalazły swoje odzwierciedlenie w języku $L_{a\phi}$,
2. Słowa produkowane przez ϕ muszą kończyć się na literę b , żeby słowa z $L_{a\phi}$ mogły się odnaleźć w języku $L_{\phi b}$.

Warunki te muszą zachodzić równocześnie.

Założmy nie wprost, że istnieje wyrażenie regularne, takie że $L_{a\phi} = L_{\phi b}$. Weźmy słowo z języka $L_{\phi b}$, które zaczyna się najmniejszą liczbą liter a (oznaczmy ją k) i nazwijmy je w . Słowo w istnieje, ponieważ ϕ jest niepustym wyrażeniem regularnym. Rozważmy w takim razie język $L_{a\phi}$. Skoro założyliśmy, że zachodzi równość $L_{a\phi} = L_{\phi b}$ to wybrane słowo w również powinno należeć do języka $L_{a\phi}$. Wskazaliśmy, że słowo w składa się z k liter a i jest to słowo o najmniejszej liczbie liter a . W języku $L_{a\phi}$ każde słowo generowane przez ϕ ma doklejoną literę a na początku, więc do tego języka należą słowa które zaczynają się przynajmniej $k + 1$ literami a . Skutkuje to sprzecznością z naszym założeniem, zatem nie istnieje takie ϕ dla którego zachodziłaby równość $L_{a\phi} = L_{\phi b}$.

$L_{a^*\phi} = L_{\phi b^*}$ Rozważmy wyrażenie regularne $\phi = a^*b^*$. Wtedy $L_{a^*\phi} = L_{a^*a^*b^*} = L_{a^*b^*} = L_{a^*b^*b^*} = L_{\phi b^*}$. Zatem rozważana równość zachodzi.