Zadanie 25

Łukasz Wróblewski

Marzec 2020

1 Wprowadzenie

Celem zadania jest konstrukcja języka L nad skończonym alfabetem Σ, że każdy NFA go rozpoznający ma liczbę stanów większą niż 200, ale istnieje NFA o liczbie stanów mniejszej niż 20 rozpoznający dopełnienie tego języka.

Pokażemy, że $\Sigma = \{1\}, \quad L = \{1^j : 210|j\}$ spełniają poszukiwane własności.

2 NFA dla L

Załóżmy nie wprost, że istnieje NFA $N =< \Sigma, Q, q_0, F, \delta >$ rozpoznający L o własności $|Q| < 210$.

Oznaczmy $A_n = \{q \in Q : (\exists 0 < j \leqslant n)(\hat{\delta}_{1^j}(q_0, q))\}$ - zbiór stanów osiągalnych przez przejście słowa niepustego nie dłuższego niż n.

Mamy $(\forall n > 0)(A_n \subseteq A_{n+1})$ oraz $(F \cap A_j \neq \emptyset) <=> (210 \leqslant j)$, bo żadne ze słów niepustych, krótszych niż 210 nie należy do języka.

Mamy 210 rosnących zbiorów, które składają się z mniej niż 210 elementów, bo tyle jest stanów N. Zatem istnieje $0 < j < 210$, że $A_j = A_{j+1}$. Wówczas niech $q \in F$:

$$\hat{\delta}_{1^{210}}(q_0, q) <=> \hat{\delta}_{1^{j+1}}\hat{\delta}_{1^{209-j}}(q_0, q) <=> (\exists q' \in Q)(\hat{\delta}_{1^{j+1}}(q_0, q') \quad \wedge \quad \hat{\delta}_{1^{209-j}}(q', q))$$

Jeśli $\hat{\delta}_{1^{j+1}}(q_0, q')$, to dla pewnego $0 < k \leqslant j$ zachodzi $\hat{\delta}_{1^k}(q_0, q')$ (bo $A_j = A_{j+1}$), a dalej ponawiając powyższy ciąg równoważności otrzymujemy $\hat{\delta}_{1^{209-j+k}}(q_0, q)$.

Jest to sprzeczność, ponieważ $209 - j + k \leqslant 209$, czyli $1^{209-j+k}$ nie należy do języka.

3 NFA dla L^c

Aby rozpoznać czy dane słowo ma długość niepodzielną przez liczbę pierwszą p wystarczy nam p stanów oznaczających reszty z dzielenia przez p długości słowa. Ponadto, by stwierdzić, że długość słowa nie dzieli się przez liczbę złożoną potrzeba i wystarczy stwierdzić, że nie dzieli się przez pewną liczbę pierwszą jej rozkładu.

Nasz automat będzie miał zatem 2+3+5+7+1=19 stanów, bo 210=2*3*5*7 oraz wyróżniony stan początkowy. Czytając pierwszą literę znajdzie się w stanach oznaczających resztę 1 z dzielenia przez odpowiednio 2,3,5 i 7, a dalej przechodząc literę będzie zmieniał stan na odpowiadający kolejne reszcie. Stanami akceptującymi będą wszystkie poza tym odpowiadającymi resztom 0 oraz stanem początkowym.

Nie jest dla mnie jasne jak ten automat wygląda.

Rozwiązanie jest poprawne. Należy poprawić ostatnie akapit.