JFIZO Lista 2

Marzec 2020

Zadanie 22

Mamy pokazać, że jeśli L jest językiem regularnym to również język $L' = \{w : \exists n \in N,\ w^n \in L\}$ jest regularny. Wiemy, że L jest regularny, w związku z tym wiemy, że istnieje DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ rozpoznający język L. Będziemy chcieli stworzyć DFA A' rozpoznający język L', aby pokazać jego regularność.

Pomysł na A'

Będziemy chcieli przejść ze słowem w przez automat zaczynając z każdego możliwego stanu, czyli stany automatu A' będą krotkami stanów z automatu A. Dlaczego? Wyobraźmy sobie, że słowo $w^3 \in L$ a zatem po wczytaniu w^3 będziemy w stanie akceptującym. W jakim stanie będziemy po wczytaniu w? Nazwijmy ten stan q_{k_1}. Zauważmy teraz, że żeby sprawdzić w jakim stanie będziemy po słowie w^2 wystarczy sprawdzić, w jakim stanie będziemy po w zaczynając od q_{k_1}. Analogicznie jeśli po wczytaniu słowa w^2 dochodzimy do stanu q_{k_2}, to żeby dowiedzieć się w jakim stanie będziemy po w^3 wystarczy sprawdzić, w jakim stanie będziemy po słowie w zaczynając od q_{k_2}. A zatem, jeśli uda nam się znaleźć ciąg stanów q_{k_0}, q_{k_1} ... taki, że zaczynamy od stanu początkowego z A oraz, że ostatni stan jest akceptujący w A to słowo w będzie zaakceptowane przez A'.

Definicja A'

$$\Sigma' = \Sigma, \tag{1}$$

Alfabet pozostaje taki sam jak w automacie A.

Dużo lepiej! Warto, żeby opis był przed formułami. Inaczej muszę czytać z dołu do góry.

$$q_0' =< q_0, q_1, ...q_n >, \tag{2}$$

Chcemy sprawdzić, gdzie dojdziemy z każdego możliwego stanu, więc krotka stanu początkowego to wszystkie stany z automatu A.

$$Q' - \text{krotki stanów z A}, \tag{3}$$

$$\delta'(< p_0, p_1, ...p_n >, a) =< \delta(p_0, a), \delta(p_1, a), ...\delta(p_n, a) > \quad (4)$$

Mapujemy funkcję przejścia z automatu A na krotki stanów.

$$F' = \{< p_0, p_1, ...p_n >: \exists k_0, k_1, ...k_i \ i < n, q_{k_i} \in F, k_0 = 0, \forall j < i \ p_{k_j} = q_{k_{j+1}}\} \quad (5)$$

Definicja mówi, że musi istnieć ciąg stanów $k_0, k_1, ...k_i$ takich, takich, że $\hat{\delta}(w, q_{k_0}) = q_{k_1}$, $\hat{\delta}(w, q_{k_1}) = q_{k_2}$, ... , $\hat{\delta}(w, q_{k_{i-1}}) = q_{k_i}$. Inaczej mówiąc, wczytując w i razy będziemy przez wyżej wymienione stany przechodzić. Dodatkowo q_{k_0} ma być stanem początkowym w automacie A, a ostatni stan q_{k_i} jest akceptujący w A.

Dowód

1) $w \in L' \Rightarrow w \in L_{A'}$

$w \in L' \Leftrightarrow \exists i \in N$ w$^i \in L$ Muszą więc istnieć w automacie stany $q_{k_0}, q_{k_1}, ...q_{k_i}$ takie, że $\hat{\delta}(w, q_0) = q_{k_1}$, $\hat{\delta}(w, q_{k_1}) = q_{k_2}$, ... $\hat{\delta}(w, q_{k_{i-1}}) = q_{k_i}$ oraz $q_{k_i} \in F$ W takim razie A' po wczytaniu w przyjmie stan $< p_0, p_1, ...p_n >$, gdzie $\forall j < i \ p_{k_j} = q_{k_{j+1}}$, $k_0 = 0$, $q_{k_i} \in F$, a wtedy mamy ciąg $k_0, k_1, ...k_i$ taki, że spełnia definicję F', czyli $w \in L_{A'}$.

Zauważmy, że w całym tym rozumowaniu nie musimy rozważać, co będzie jeśli $i > n$, dlaczego? Zauważmy, że jeśli n to liczba stanów, a i miałoby być większe od n, to z zasady szufladkowej Dirichleta wczytując w złożone i razy będą stany, przez które będziemy przechodzić więcej niż jeden raz i wpadniemy w cykl. Możemy więc skrócić tę ścieżkę o wyżej wspomniany cykl, dzięki czemu przez żaden stan nie powinniśmy przechodzić więcej niż 1 raz, a wtedy długość nowej ścieżki, czyli nowe i będzie mniejsze lub równe n.

Tu aż się prosi o napisanie lematu jak u GdzieJestNemo.

2) $w \in L_{A'} \Rightarrow w \in L'$

Wiemy, że $w \in L_{A'}$, w takim razie, wiemy, że istnieje odpowiedni ciąg stanów $q_{k_0}, q_{k_1}, ...q_{k_i}$ dla pewnego i ∈N taki, że po wczytaniu w ze stanu q$_{k_0}$ przechodzimy do q_{k_1}, po wczytaniu w ze stanu q_{k_1} przechodzimy do q_{k_2} itd. , a zatem w^i∈L a więc w∈L'.

Odpowiedni czyli jaki?

Można napisać:

q_0 = q_{k_0} ->^{w} q_{k_1} ...
... ->^{w} q_{k_i}

Rozwiązanie jest poprawne i kompletne.
Podoba mi się, że jest dobrany odpowiedni poziom abstrakcji.