zadnie 79

Agnieszka Pawicka

20 marca 2020

Zadanie 79. Pokaż, że jeśli A $\leqslant_{reg}$B i B jest regularny to A też.

Z założenia A $\leqslant_{reg}$B, więc istnieje transducer T=$\langle \Sigma,\ \Sigma_1,\ Q_T,\ q_T,\ \delta_T,\ \sigma_T\ \rangle$, taki że $\forall_{w\in\Sigma^*} w \in A \Leftrightarrow f_T(w) \in B$. Załóżmy bez straty ogólnośći, że jest to transducer Moore'a.

Z założenia B jest regularny, więc istnieje DFA
D_B=$\langle \Sigma_1,\ Q_B,\ q_0,\ F_B,\ \delta_B\ \rangle$, który rozpoznaje język B.

A jest regularny $\Leftrightarrow$ istnieje DFA D_A, który rozpoznaje A. Skonstruujemy taki automat.

Niech D_A=$\langle \Sigma,\ Q_A,\ q_0,\ F_A,\ \delta_A\ \rangle$, gdzie:

- $Q_A = \{q \in Q_B | \exists_{w\in\Sigma^*} \hat{\delta}_B(q_0, f_T(w)) = q\}$, (łatwo zauważyć, że $q_0 \in Q_A$)
- $F_A = F_B \cap Q_A$,
  dla $a \in \Sigma$:
- $\delta_A(q_0, a) = \hat{\delta}_B(q_0, f_T(a))$
- $\delta_A(q, a) = \hat{\delta}_B(q, \sigma_T(\hat{\delta}_T(q_T, wa)))$, dla $w \in \Sigma^* : \hat{\delta}_b(q_0, f_T(w)) = q$ (takie w istnieje, co wynika z definicji Q_A)

Lemat1 Dla automatów D_A, D_B zachodzi $\hat{\delta}_A(q_0, w) = \hat{\delta}_B(q_0, f_T(w))$

dowód (indukcyjny):
Baza:
$f_T(\epsilon) = \epsilon$

$$\hat{\delta}_A(q_0, \epsilon) = q_0 = \hat{\delta}_b(q_0, \epsilon) = \hat{\delta}_B(q_0, f_T(\epsilon))$$

Jeśli $a \in \Sigma$, to

$$\hat{\delta}_A(q_0, a) = \delta_A(q_0, a) = \hat{\delta}_B(q_0, f_T(a))$$

Krok indukcyjny:
Załóżmy, że dla słów $w \in \Sigma^*$, $|w| = n$ zachodzi $\hat{\delta}_A(q_0, w) = \hat{\delta}_B(q_0, f_T(w))$.
Jak wiadomo, dla transducera Moore'a zachodzi: $f_T(wa) = (f_T(w))\sigma_T(\hat{\delta}_T(q_T, wa))$.

Weźmy $a \in \Sigma$, niech $q = \hat{\delta}_A(q_0, w) = \hat{\delta}_B(q_0, f_T(w))$.

$$\hat{\delta}_A(q_0, wa) = \delta_A(q, a) = \hat{\delta}_B(q, \sigma_T(\hat{\delta}_T(q_T, wa))) = \hat{\delta}_B(\hat{\delta}_B(q_0, f_T(w)), \sigma_T(\hat{\delta}_T(q_T, wa))) =$$

$$= \hat{\delta}_B(q_0, (f_T(w))\sigma_T(\hat{\delta}_T(q_T, wa))) = \hat{\delta}_B(q_0, f_T(wa))$$

Z zasady indukcji matematycznej $\hat{\delta}_A(q_0, w) = \hat{\delta}_B(q_0, f_T(w))$ zachodzi dla każdego $w \in \Sigma^*$

Wystaczy pokazać, że $w \in A \Leftrightarrow \hat{\delta}_A(q_0, w) \in F_A$.

$\Rightarrow$

Załóżmy, że $w \in A$. Wiemy z lematu, że

$$\hat{\delta}_A(q_0, w) = \hat{\delta}_B(q_0, f_T(w)).$$

Ponieważ A $\leqslant_{reg}$B, to $f_T(w) \in B$, więc $\hat{\delta}_B(q_0, f_T(w)) \in F_B$ oraz $\hat{\delta}_A(q_0, w) \in Q_A$. Stąd $\hat{\delta}_A(q_0, w) \in F_B \cap Q_A = F_A$.

$\Leftarrow$

Załóżmy, że $w \notin A$. Ponieważ A $\leqslant_{reg}$B, to $f_T(w) \notin B$, więc $\hat{\delta}_B(q_0, f_T(w)) \notin F_B$. Stąd $\hat{\delta}_A(q_0, w) \notin F_A$.