Autor: Mikołaj Kowalik - 283476

Lista 2 - zadanie 43

Treść zadania

> Udowodnij, że rzut relacji automatycznej jest relacją automatyczną.

Notacje

Dla jednoznaczności wypiszę tutaj użyte konwencje notacyjne:

- P_Σ - projekcja zbioru po ostatniej współrzędnej (ucinamy ostatnią współrzędną - bez utraty ogólności)
- $\langle a, 0 \rangle$ - dopisanie do słowa a zera (dodanie wymiaru)

Rozwiązanie

Wiemy, że R jest relacją automatyczną.
Chcemy pokazać, że rzut relacji R (oznaczony P_R jest relacją automatyczną)

Twierdzenie 1

Istnieje NFA B, taki, że rozpoznaje słowa z L_{P_R}

Dowód

Na początku chciałbym zauważyć, że wnioskiem z tego twierdzenia jest to, że P_R jest relacją automatyczną.

Z tego, że R jest relacją automatyczną wiemy, że istnieje automat DFA A rozpoznający język L_R

$A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$

Zdefiniujmy więc szukany automat NFA B:

$B = \langle P_\Sigma, Q, q_0, F_B, \delta_P \rangle$,

gdzie:

- F_B to zbiór stanów - takich że możemy się w nich znaleźć jakbyśmy wczytywali liczbę + nadmiarowe zera.

  Dla przykładu zał $k = 2$, $w = \langle 1, 1 \rangle \langle 0, 1 \rangle \langle 0, 1 \rangle$, które po zrzutowaniu wyglądałoby:

  $P_w = 100$, gdzie $l(P_w) = 1$, wtedy chcemy żeby liczba 1_b (ta bez nadmiarowych zer) była rozpoznawana przez NFA B, żeby to zrobić musimy zmodyfikować nasz zbiór stanów końcowych tak żeby obsługiwał ten corner-case. Dla k=2 ten zbiór wyglądałby tak (dla innych k podobnie ale trzeba uwzględniać wycinanie zer nadmiarowych na innych pozycjach niż pierwsza):

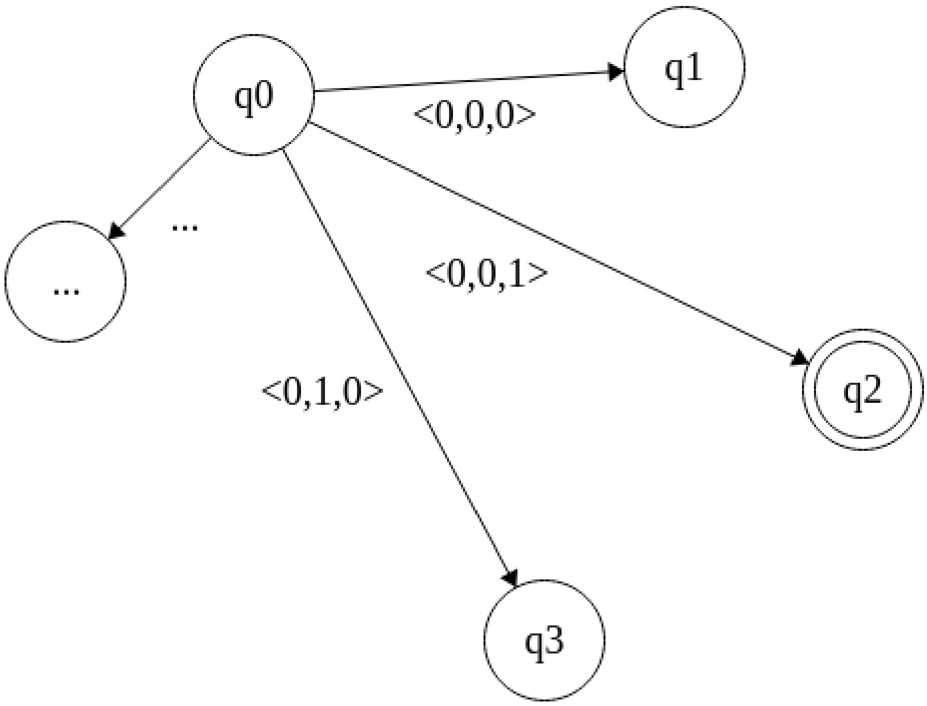
  $F_B = \{q \in Q : \exists_{q' \in F} \exists_{k \in \mathbb{N}} \delta(q, 0^k) = q'\}$ - uwaga jest taka, że zgodnie z definicją wczytujemy słowo od najmniej znaczących cyfr.

- $\delta_P : P_\Sigma \times Q \to P(Q)$, gdzie $P(Q)$ to zbiór potęgowy Q

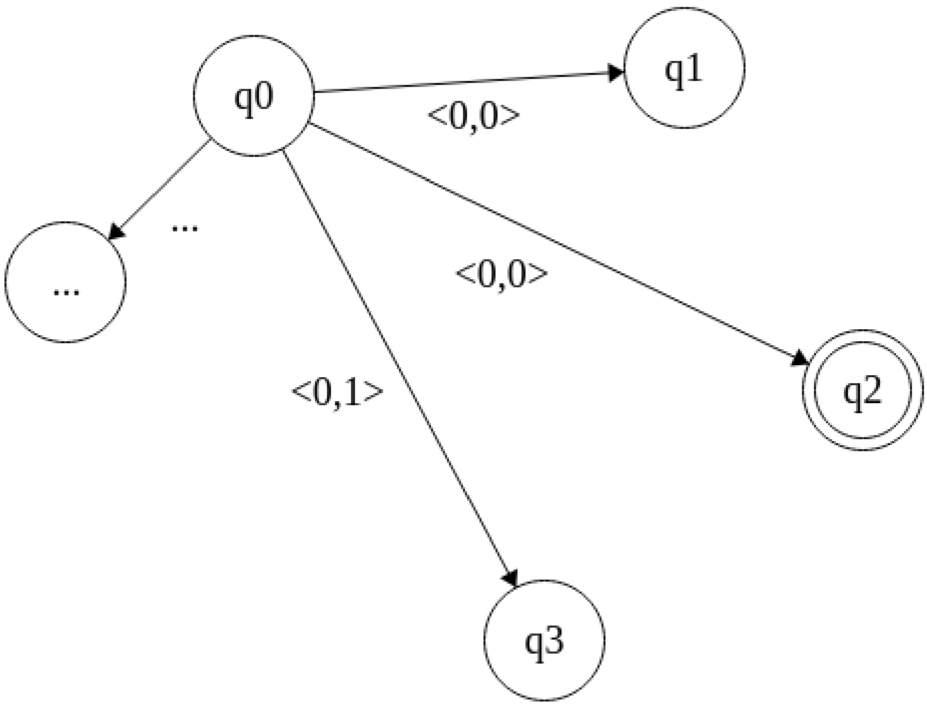
- $\delta_P(a, q) = \{\delta(\langle a, 0\rangle, q), \delta(\langle a, 1\rangle, q)\}$

Idea funkcji przejść na obrazku:

Dostajemy automat A:



I przekształcamy go na NFA B:



Lemat 1

$w \in L_B \Rightarrow w \in L_{P_R}$

Dowód lematu

Treść tego lematu mówi, że jeżeli umiemy rozpoznać słowo w przez B to jest to słowo z języka L_{P_R} (czyli tego rzutu relacji R) - innymi słowy chcemy pokazać, że jeśli rozpoznajemy jakieś słowo to w wyniku konstrukcji nie dorzuciliśmy jakichś 'śmieciowych' słów

Dowód przeprowadzimy dla $k=2$, żeby uniknąć trudniejszego do formalnego opisu corner-case opisanego przy definicji zbioru F_B - tego, że nie uwzględniamy usuwania zer z pozycji innych niż pierwsza.

Weźmy więc $w \in L_B$. Słowo w ma wtedy postać $w \in \{0,1\}^n$ żeby pokazać że $w \in L_{P_R}$ pokażemy, że istnieje takie słowo $v \in L_R$, że po zrzutowaniu i usunięciu pewnej ilości nadmiarowych zer (być może wszystkie) dostaniemy słowo v' takie że $v' = w$.

Niech $w = a_1, a_2, \ldots, a_n$, i niech $v = \langle a_1, b_1 \rangle \langle a_2, b_2 \rangle \ldots \langle a_n, b_n \rangle \langle 0, b_{-j} \rangle \ldots \langle 0, b_0 \rangle$

Czy istnieje takie słowo v? Tak - Załóżmy nie wprost, żetakie słowo nie istnieje - dochodzimy do sprzeczności z tym, że słowo w istnieje.

Rozważmy $\hat{\delta}(q_0, \langle a_1, b_1 \rangle \ldots \langle a_n, bn \rangle) = q$ - zauważmy, że $q \in F_B$, jest tak dlatego, że jak wczytamy dalsze zera to dostaniemy $\hat{\delta}(q, \langle 0, b_{-j} \rangle \ldots \langle 0, b_0 \rangle) = q'$ - gdzie $q' \in F$ (bo $v \in L_A$) - to znaczy, że po zrzutowaniu v dostaniemy liczbę $l(w) \in P_R$ a to znaczy, że $w \in L_{P_R}$

Lemat 2

$w \in L_{P_R} \Rightarrow w \in L_B$

Dowód lematu

Podobnie jak wyżej. Bierzemy słowo $v \in L_R$ takie że $P_v = w$, że po wczytaniu zer znajdziemy się w stanie z F i to znaczy, że stan po wczytaniu $w \in L_B$

Wnioski

Korzystając z wniosków z Twierdzenia 1, popartego Lematami 1 i 2 - pokazaliśmy, że L_R jest relacją automatyczną.