Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
Sprawozdanie do zadania nr 81

Prowadzący: Jerzy Marcinkowski
Autor: Jacek Leja

Wrocław, 20 marca 2020

1. Treść Zadania

Niech $A \subseteq \{(,),[,],\langle,\rangle\}^*$ będzie językiem poprawnie rozstawionych nawiasów trzech rodzajów zaś $B \subseteq \{(,),[,]\}^*$ językiem poprawnie rozstawionych nawiasów dwóch rodzajów. Pokaż że $A \leqslant_{req} B$. *Wskazówka: każde słowo produkowane przez σ ma się składać z dwóch symboli.*

2. Rozwiązanie

2.1. Wstęp

Wiemy, że $A \leqslant_{req} B$ zachodzi, jeśli istnieje transducer T (Moore'a lub Mealy'ego) taki że dla każdego $w \in \Sigma^*$ zachodzi $w \in A$ w.t.w gdy $f_T(w) \in B$. By udowodnić $A \leqslant_{req} B$ możemy zatem stworzyć transducer tłumaczący wyrazy z języka A na język B i następnie udowodnić, że spełnia on wymogi relacji $\leqslant_{req}$.

Zdefiniujmy więc transducer Mealy'ego $T = \langle \Sigma_A, \Sigma_B, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$, gdzie $\Sigma_A = \{(,),[,],\langle,\rangle\}, \Sigma_B = \{(,),[,]\}$. Q składa się z tylko jednego stanu q_0, który dla dowolnego znaku przechodzi sam w siebie, $\forall(a \in \Sigma_A) : \delta(a, q_0) = q_0$. σ jest zdefiniowana dla wszystkich $q \in Q$ w nastepujący sposób:

$$\begin{gathered}
\sigma(q, \text{`('}) = \text{`[('},\\
\sigma(q, \text{`)'}) = \text{`)]'},\\
\sigma(q, \text{`['}) = \text{`[(('},\\
\sigma(q, \text{`]'}) = \text{`))]'},\\
\sigma(q, \text{`}\langle\text{'}) = \text{`[((('},\\
\sigma(q, \text{`}\rangle\text{'}) = \text{`)))]'}.
\end{gathered}$$

Przykład: $f_T(\text{`}\langle()\rangle\text{'}) = \text{`[((([()])))]'}$.

2.2. $w \in A \implies f_T(w) \in B$

Ze sposobu jaki zdefinowaliśmy σ jest oczywiste, że jeżeli dowolny wyraz w zawierał tylko litery należące do Σ_A, to $f_T(w)$ będzie zawierało jedynie litery należące do Σ_B. Pozostało jedynie udownodnić, że jeżeli w było poprawnym rozstawieniem nawiasów w A, to $f_T(w)$ musi być poprawnym rozstawieniem nawiasów w B.

Zdefiniujmy co oznacza 'poprawne ustawnienie nawiasów'. Niech zmienne a, b, c oznaczają odpowiednio liczbę wystąpień nawiasów $(), [], \langle\rangle$ w słowie. Niech na początku będą równe 0. Przeglądając dowolne słowo w od lewej do prawej, odpowiednia zmienna zwiększa się o 1, gdy przeglądaną literą jest nawias otwierający a zmniejsza się o 1 gdy jest to nawias zamykający. Słowo w jest poprawnym ustawieniem nawiasów, gdy w trakcie przeglądania tego słowa zgodnie z opisaną wyżej procedurą, żadne ze zmiennych a, b, c nie będą ujemne i po przejrzeniu całego słowa wszystkie z tych zmiennych będą równe 0.

Załóżmy, że twierdzenie, które chcemy udowodnić, jest nieprawdziwe, wtedy istnieje jeden lub więcej kontrprzykładów w, dla których $w \in A \wedge f_T(w) \notin B$. Wiemy, że słowo puste jest poprawnym rozstawieniem nawiasów zarówno w A jak i w B, więc kontrprzykłady muszą być dłuższe od 0. Weźmy najkrótszy z tych kontrprzykładów, nazwijmy go v. Wiemy, że v jest poprawnym rozstawieniem nawiasów w A, co oznacza, że dla pierwszego znaku w v musi istnieć odpowiedni zamykający nawias w którymś miejscu tego wyrazu. Wiemy również, że translacja tej pary nawiasów za pomocą f_T da nam poprawne rozstawienie nawiasów w B, co można łatwo zauważyć analizując możliwe translacje σ. Jeżeli nawias zamykający dla pierwszej litery w v jest na końcu tego słowa, to możemy skrócić kontrprzykład v o pierwszy i ostatni znak. Jeżeli ten nawias zamykający znajduje się w jakimś innym miejscu słowa v, to możemy podzielić v na dwa osobne przypadki, jeden dla liter w v do owego zamykającego nawiasu, a drugi dla liter po tym nawiasie. W obydwóch przypadkach wychodzi nam, że istnieje krótszy kontrprzykład od v, co jest sprzeczne z naszymi założeniami, kończąc tym samym dowód twierdzenia $w \in A \implies f_T(w) \in B$.

2.3. $f_T(w) \in B \implies w \in A$

Dowód będzie analogiczny, co do poprzedniego twierdzenia. Zauważmy, że w f_T mamy zdefiniowane translacje jedynie dla liter należących do Σ_A, czyli jeżeli $f_T(w) \in B$, to w musi się składać z liter należących do Σ_A. Pozostało jedynie udownodnić, że jeżeli $f_T(w)$ było poprawnym rozstawieniem nawiasów w B, to w musi być poprawnym rozstawieniem nawiasów w A.

Załóżmy, że twierdzenie, które chcemy udowodnić, jest nieprawdziwe, wtedy istnieje jeden lub więcej kontrprzykładów w, dla których $f_T(w) \in B \wedge w \notin A$. Wiemy, że słowo puste jest poprawnym rozstawieniem nawiasów zarówno w A jak i w B, więc kontrprzykłady muszą być dłuższe od 0. Weźmy najkrótszy z tych kontrprzykładów, nazwijmy go v. Wiemy, że $f_T(v)$ jest poprawnym rozstawieniem nawiasów w B, co oznacza, że dla każdego nawiasu otwierającego w $f_T(v)$ istnieje odpowiedni nawias zamykający. Patrząc na możliwe translacje σ, możemy zauważyć, że początkowymi literami w $f_T(v)$ muszą być '[(', '[((' lub '[(((', by $f_T(v)$ było poprawnym rozstawieniem nawiasów. Każdą z tych kombinacji znaków możemy uzyskać jedynie na jeden sposób w translacji, tak samo odpowiednio nawiasy zamykające dla tych liter, czyli ')]', '))]' oraz ')))]' również możemy uzyskać jedynie na jeden sposób. Podobnie jak w poprzednim dowodzie, dla każdej z tych trzech kombinacji nawiasów otwierających musi istnieć gdzieś w $f_T(v)$ odpowiadająca kombinacja nawiasów zamykających, jeżeli są one na na końcu $f_T(v)$, to możemy skrócić słowo v o pierwszy i ostatni znak. Jeżeli te nawiasy zamykające są w środku słowa $f_T(v)$, to możemy podzielić $f_T(v)$ na dwa słowa, a tym samym możemy podzielić słowo v na dwa słowa, gdyż każde słowo f_T można uzyskać jedynie na jeden sposób. W obydwóch przypadkach, istnieje krótszy kontrprzykład od v, co jest sprzeczne z naszym założeniem o v, kończąc tym samym dowód twierdzenia $f_T(w) \in B \implies w \in A$ i całego zadania.