Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
Rozwiązanie zadania 74

Aleksander Czeszejko-Sochacki

28 marca 2020

Zadanie 41. Pokaż, że istnieje konfluentny język bezkontekstowy który nie jest jednostajnie konfluentny.

1 Definicje

O języku $A \subseteq \Sigma^*$ powiemy, że jest konfluentny, jeśli:

$$\forall_{w,v\in\Sigma^*}\exists_{x\in\Sigma^*}\forall_{y\in\Sigma^*}(wxy \in A \Leftrightarrow vxy \in A)$$

O języku $A \subseteq \Sigma^*$ powiemy, w kolejnych trzech zadaniach, że jest jednostajnie konfluentny, jeśli istnieje taka stała $c \in N$, że:

$$\forall_{w,v\in\Sigma^*}\exists_{x\in\Sigma^*}\forall_{y\in\Sigma^*}(|x| \leq c \wedge (wxy \in A \Leftrightarrow vxy \in A))$$

2 Przykład konfluentnego języka bezkontekstowego, który nie jest jednostajnie konfluentny

$$L_\phi \text{ gdzie } \phi = (a+b)^n b^n (a+b)^*$$

Ponadto, niech odtąd $\psi = (a+b)^n b^n$ oraz $\chi = (a+b)^*$.
Oczywiście $L_\phi = L_{\psi\chi} = L_\psi L_\chi$

3 Uzasadnienie

Pokażemy, że powyższy język jest bezkontekstowy, konfluentny i nie jest jednostajnie konfluentny.

Twierdzenie 1 (Bezkontesktowy)**.** *L jest językiem bezkontekstowym*

Dowód. Wyrażenie regularne opisuje język regularny, który jest również językiem bezkontekstowym $\square$

Twierdzenie 2 (Konfluentny)**.** *L jest językiem konfluentnym*

Dowód.

Lemat 3. *Weźmy dowolne $u, w \in \Sigma^*$. BSO $|w| \geq |u|$. Połóżmy $x = b^{|w|}$. Oczywiście $x \in \Sigma^*$. Wtedy dla dowolnego $y \in \Sigma^*$*

$$wxy \in L_\psi \wedge uxy \in L_\psi$$

.

Dowód. Zauważmy, że $wx \in L_\psi$ ($|w|$ dowolnych liter, a następnie $|w|$ liter b) oraz $y \in L_\chi$, stąd naturalnie $wxy \in L_\phi$
Ponadto, niech $ux = uvz$, gdzie $|v| = |u|$. Wtedy $uv \in L_\psi$ oraz $zy \in L_\chi$, zatem $uvz \in L_\phi$.

□

Ponieważ zachodzi koniunkcja, tym bardziej zachodzi równoważność z definicji języka konfluentnego. □

Twierdzenie 4 (Nie jednostajnie konfluentny)**.** *L nie jest językiem jednostajnie konfluentnym*

Dowód. Załóżmy, że

1. L_ψ jest jednostajnie konfluentny
2. c - stała języka jednostajnie konfluentnego
3. k - najmniejsza liczba parzysta większa od c
4. $w = a^k, u = b^k$ - pewne słowa z Σ^*

Mamy dla $y = \varepsilon$ $wxy \notin L_\psi$ (bo po w musiałoby wystąpić k liter b, a $|xy| < k$) oraz $uxy \in L_\psi$ (bo $uxy = b^{k/2}b^{k/2}xy$). Wniosek: nie zachodzi równoważność z definicji wyrażenia jednostajnie konfluentnego. Sprzeczność, zatem L_ψ nie jest jednostajnie konfluentny. □