

Zadanie 55.

Maciej Korpalski

Treść: Czy zbiór takich słów nad alfabetem $\{0, 1\}$, które mają parzystą długość, i w których pierwszej połowie jest przynajmniej tyle samo jedynek, co w drugiej połowie, jest bezkontekstowy?

Rozwiązanie: Język z treści zadania (nazwijmy go L) nie jest bezkontekstowy. Pokażemy to używając lematu o pompowaniu.

Założmy nie wprost, że język L jest bezkontekstowy. Wtedy niech p będzie stałą z lematu o pompowaniu dla języka L . Rozważmy słowo $w = 0^p 1^p 0^p 1^p \in L$. Wiemy, że można je podzielić na pięć części $w = uvxyz$ takich, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $uv^k xy^k z \in L$, $|vxy| \leq p$ i $|vy| > 0$.

Mamy kilka przypadków na to, gdzie mogą znaleźć się podśłowa v, x, y .

- Słowa v, y zawierają jedynie zera z pierwszej części słowa.
Mamy w tej sytuacji $uvvxyyz \notin L$, ponieważ przynajmniej jedna jedynka z końca pierwszej połowy słowa w znajdzie się w drugiej połowie nowego słowa. Warto napisać to słowo.
- W przynajmniej jednym ze słów v, y znajduje się jedynka z pierwszej połowy słowa w .
Wtedy słowo $uxz \notin L$, ponieważ liczba jedynek w pierwszej połowie słowa się zmniejszyła, a w drugiej nie. Ale podział się zmieni!
- Słowa v, y zawierają jedynie zera z drugiej części słowa.
Tutaj $uxz \notin L$, ponieważ przynajmniej jedna jedynka z końca pierwszej połowy słowa w znajdzie się w drugiej połowie nowego słowa. Warto napisać to słowo.
- W przynajmniej jednym ze słów v, y znajduje się jedynka z drugiej połowy słowa w .
Słowo $uvvxyyz \notin L$, ponieważ w drugiej połowie słowa pojawiła się przynajmniej jedna dodatkowa jedynka.

Przy czym w każdym przypadku może się też zdarzyć, że słowo, którego nienależenie do L postulujemy jest nieparzystej długości. Wtedy tym bardziej nie jest ono elementem języka L .

Skoro niezależnie od położenia słów v, y słowa w nie można pompować wewnątrz języka L , to język L nie jest bezkontekstowy.