Zadanie 22

GdziejestNemo?

22 marca 2020

Treść zadania

Wiadomo, że L jest językiem regularnym. Pokaż, że w takim razie język $\{w : \exists_{n\in\mathbb{N}} w^n \in L\}$ jest też językiem regularnym. Przez w^n rozumiemy tu słowo w skonkatenowane ze sobą n razy.

Rozwiązanie

Skoro L jest językiem regularnym, weźmy DFA $A =< \Sigma, \delta, q_0, Q, F >$ rozpoznający ten język. Niech $k = |Q|$.

Lemat 1. *Jeżeli $w^n \in L$ i $n > k$, wtedy istnieje $m \leqslant k$, takie że $w^m \in L$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $\forall_{m<n} w^m \notin L$, czyli inaczej mówiąc $\forall_{m<n}\hat{\delta}(q_0, w^m) \notin L$. Popatrzmy na ciąg stanów $\hat{\delta}(q_0, w), \hat{\delta}(q_0, w^2), ..., \hat{\delta}(q_0, w^n)$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieje takie $i < j$, że

$$\hat{\delta}(q_0, w^i) = \hat{\delta}(q_0, w^j),$$

ponieważ elementów ciągu jest $n > k$, a stanów w automacie k.
W takim razie

$$\hat{\delta}(q_0, w^{n-(j-i)}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w^i), w^{n-j}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w^j), w^{n-j}) = \hat{\delta}(q_0, w^n)$$

Zatem $w^{n-(j-i)} \in L$ co jest sprzeczne z założeniem. $\square$

Z lematu wynika, że $\{w : \exists_{n\in\mathbb{N}} w^n \in L\} = \{w : \exists_{n\in\{1,2,...,k\}} w^n \in L\}$.
Nazwijmy ten język L'.
Skonstruujemy DFA $B =< \Sigma, \delta', q_0', Q', F' >$, rozpoznający język L'. Do tego miejsca mi się bardzo podoba.
Niech:

$\langle, \Sigma .., \rangle$

$$Q' = \{q_0, q_1, ..., q_{k-1}\}^k$$
$$q_0' =< q_0, q_1, ..., q_{k-1} >$$
$$\hat{\delta}'(< s_0, s_1, ..., s_{k-1} >, w) =< \hat{\delta}(s_0, w), \hat{\delta}(s_1, w), ..., \hat{\delta}(s_{k-1}, w) >$$

Można było automata najpierw opisać.

I-ty elementy krotki $\hat{\delta}'(q_0', w)$ oznacza stan w którym znajdzie się DFA A, jeżeli znajdował się w stanie q_i i wczytał słowo w.
Na podstawie stanu $\hat{\delta}'(q_0', w) =< q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_{k-1}} >= q'$, znajdziemy $S(q') = \{\hat{\delta}(q_0, w), \hat{\delta}(q_0, w^2), ..., \hat{\delta}(q_0, w^k)\}$.

Dobrze by było ten zbiór znawać, tak żeby nazwa oddawała intuicję. Wtedy można ograniczyć liczbę wyrażen matematycznych.

Zaczynamy w stanie $q_0 = \hat{\delta}(q_0, w^0)$. Jeżeli $\hat{\delta}(q_0, w^i) = q_j$, wtedy z defincji $\hat{\delta}'$ wiemy, że $\hat{\delta}(q_0, w^{i+1})$ będzie równe j-temu elementowi $\hat{\delta}'(q_0', w)$. Algorytm wyznaczania $S(q')$ możemy zapisać następująco:

Jakby nieco rozszerzyć ten opis, to byłby wystarczający bez algorytmu poniżej

Moim zdaniem, to jest dużo bardzej czytelne niż poprzednia wersja.

Dane : $q' =< q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_{k-1}} >$
Wynik : $S(q')$
$S \leftarrow \{\}$
$i \leftarrow 0$ // numer stanu dla poprzednio rozpatrywanej potęgi w
$wykladnik \leftarrow 1$ // aktualnie rozpatrywany wykładnik
while $wykladnik \leqslant k$ **do**
  $nastepny\_stan \leftarrow$ i-ty element krotki q'
  $S \leftarrow S \cup \{nastepny\_stan\}$
  $i \leftarrow$ numer stanu $nastepny\_stan$
  $wykladnik \leftarrow wykladnik + 1$
end
zwróć S

Zatem jesteśmy w stanie znaleźć stany akceptujące :

$$F' = \{q' \in Q' : \exists_{s \in S(q')} s \in F\}$$

Pokażę, że $w \in L'$ wtw. gdy $\hat{\delta}'(q_0', w) \in F$

wtedy, i tylko wtedy zamiast wtw. (ogólniej, nie piszemy na tablicy).

Dowód. Jeżeli $w \in L'$ to istnieje $n \in \{1, 2, ..., k\}$, takie że $\hat{\delta}(q_0, w^n) \in F$. Z faktu $\hat{\delta}(q_0, w^n) \in S(\hat{\delta}'(q_0', w))$ wynika, że $\hat{\delta}'(q_0', w) \in F$.
Jeżeli $w \notin L'$ to dla każdego $n \in \{1, 2, ..., k\}$, zachodzi $\hat{\delta}(q_0, w^n) \notin F$. W takim razie $\forall_{s \in S(\hat{\delta}'(q_0', w))} s \notin F'$. □

Rozwiązanie jest już znacznie lepsze.
Warto dodać trochę "światła" poprzez stosowanie odstępów oraz ograniczać wystąpienia wyrażeń matematycznych.