Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa

Rozwiązanie zadania 74

Jakub Mendyk

27 marca 2020

Treść

Pokaż, że istnieje konfluentny język bezkontekstowy który nie jest jednostajnie konfluentny.

Pomysł rozwiązania

Pokażemy, że $L = \{0^n 1 w : |w| \geqslant n\} \subseteq \{0,1\}^*$ – język, w którym słowa za pierwszą jedynką mają więcej liter niż przed – jest konfluentnym językiem bezkontekstowym który nie jest jednostajnie konfluentny. W tym celu:

1. Pokażemy, że L jest bezkontekstowy.
2. Sformułujemy i udowodnimy lemat pomocniczy, który ułatwi nam dowodzenie konfluentności pewnej klasy języków, do której należy L.
3. Pokażemy, że L jest konfluentny.
4. Dowiedziemy, że L nie jest jednostajnie konfluentny.

Rozwiązanie

1. L jest bezkontekstowy

Zauważmy, że $L_G =< \{0,1\}, \{S, E\}, S, \pi >$, gdzie

$$\pi = \{S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1E,\ E \to \epsilon \mid 1E \mid 0E\}$$

jest gramatyką bezkontekstową, która generuje L. Dowód dla wnikliwych czytelników znajduje się na końcu dokumentu.

2. Lemat pomocniczy

Lemat. *Jeśli język $L \subseteq \Sigma^*$:*

$$\forall w \in \Sigma^* \;\; (w \in L \Rightarrow \forall y \in \Sigma^* \;\; wy \in L) \tag{1}$$

jest zamknięty na dopisywanie liter na koniec słów, oraz

$$\forall w \in \Sigma^* \;\; \exists x \in \Sigma^* \;\; wx \in L \tag{2}$$

każde słowo można przedłużyć do słowa z L

to jest konfluentny.

Dowód. Niech $w, v \in \Sigma^*$, wtedy:

$$\begin{aligned} w \in \Sigma^* \xrightarrow[]{(2)\ x=x_1} \; wx_1 \in L \;\; &\xrightarrow{(1)\ y=x_2} \; wx_1x_2 \in L \xrightarrow{(1)} \; w(x_1x_2)y \in L \\ vx_1 \in \Sigma^* \;&\xrightarrow{(2)\ x=x_2} \; vx_1x_2 \; \in L \xrightarrow{(1)} \; v(x_1x_2)y \; \in L \end{aligned}$$

Z (2), istnieje x_1 że $wx_1 \in L$. Podobnie, istnieje x_2 że $vx_1x_2 \in L$, a z (1) wiemy, że wx_1x_2 także należy do L. Dla dowolnego $y \in \Sigma^*$ wiemy z (1), że $wx_1x_2y \in L$ i $vx_1x_2y \in L$ stąd

$$\forall y \in \Sigma^* \;\; wx_1x_2y \in L \Leftrightarrow vx_1x_2 \in L$$

□

3. $L = \{0^n1w : |w| \geqslant n\} \subseteq \{0,1\}^*$ jest konfluentny

Dowód. Skorzystamy oczywiście z lematu.

1. L jest zamknięty na dopisywanie liter na koniec słów

   Niech $u \in L$, zatem $u = 0^n1w,\; |w| \geqslant n$. Dla $v \in \Sigma^*$: $uv = 0^n1wv,\; |wv| \geqslant n,\; uv \in L$.

2. Każde słowo można przedłużyć do słowa z L

   Niech $u \in \Sigma^*$. Jeśli $u \in L$ to nie ma potrzeby go przedłużać. W przeciwnym razie u jest postaci:

   - $u = 0^n$, wtedy $u10^n = 0^n10^n \in L$
   - $u = 0^n1w,\; |w| < n$.
     Niech $v \in \Sigma^*,\; |v| = n - |w|$. Wtedy $uv = 0^n1wv,\; |wv| = |w| + n - |w| = n \geqslant n$.

L spełnia warunki lematu zatem jest konfluentny.

□

4. L nie jest jednostajnie konfluentny

Dowód. (nie wprost)

Załóżmy, że L jest jednostajnie konfluentny ze stałą c. Niech $w \in L,\; v = 0^c \notin L$. Najkrótsze słowo w L, którego prefiksem jest v to $vx = 0^c10^c,\; x = 10^c$. Jednak $|x| > c$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem że L jest jednostajnie konfluentny ze stałą c.

□

Dodatek: Dowód bezkontekstowości L

Teza. *Gramatyka* $L_G =< \{0,1\}, \{S,E\}, S, \pi >$, *gdzie*

$$\pi = \{S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1E,\ E \to \epsilon \mid 0E \mid 1E\}$$

generuje język $L = \{0^n 1w : |w| \geqslant n\} \subseteq \{0,1\}^*$.

Dowód. Pokażemy inkluzje $L_G \subseteq L$ oraz $L \subseteq L_G$.

1. $L_G \subseteq L$. Zauważmy, że produkcja E generuje $\{0,1\}^*$. Dla dowolnego drzewa wyprowadzenia dla L_G wszystkie nieterminale leżą na ścieżce od korzenia do pewnego liścia, bo każda produkcja tworzy co najwyżej jeden nieterminal. Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem długości ścieżki od korzenia do ostatniego wystąpienia nieterminala S – ostatnie wystąpienie S musiało zostać zastąpione korzystając z produkcji $S \to 1E$.

- $u \in L_G$ i pierwsza produkcja w drzewie wyprowadzenia u to $S \to 1E$.

  Zatem $u = 0^0 1u'$ i $|u'| \geqslant 0$, stąd $u \in L$.

- $u \in L_G$ i pierwsza produkcja w drzewie wyprowadzenia u to $S \to 0Sa,\ a \in \{0,1\}$.

  Zatem $u = 0u'a$ dla pewnego $u' \in L_G$, którego długość ścieżki od korzenia do ostatniego wystąpienia nieterminala S jest o 1 krótsza niż dla u. Stąd $u' \in L,\ u' = 0^n 1w,\ |w| \geqslant n$. Wtedy $u = 00^n 1wa = 0^{n+1} 1wa$ i $|wa| = |w| + 1 \geqslant n+1$, zatem $u \in L$.

2. $L \subseteq L_G$. Przeprowadźmy indukcję względem długości słowa.

- $0^0 1w \in L,\ w \in \{0,1\}^*$

  Z nieterminala E można wyprowadzić dowolne słowo z $\{0,1\}^*$, zatem $E \xrightarrow{*} w$, wtedy $S \to 1E \xrightarrow{*} 1w$, stąd $1w \in L_G$.

- $u = 0^{n+1} 1wa \in L,\ |w| \geqslant n,\ a \in \{0,1\}$

  Niech $v = 0^n 1w$ wtedy $u = 0va$ i $v \in L$. Skoro $|v| < |u|$, to $v \in L_G,\ S \xrightarrow{*} v$. Zatem $S \to 0Sa \xrightarrow{*} 0va = u$. Otrzymujemy więc $S \xrightarrow{*} u$ i $u \in L_G$.

$\square$