Zadanie 22

autor: GdziejestNemo?

20 marca 2020

Treść zadania

Wiadomo, że L jest językiem regularnym. Pokaż, że w takim razie język $\{w : \exists_{n\in\mathbb{N}} w^n \in L\}$ jest też językiem regularnym. Przez w^n rozumiemy tu słowo w skonkatenowane ze sobą n razy.

Rozwiązanie

Skoro L jest językiem regularnym, weźmy DFA $A =< \Sigma, Q, q_0, F, \delta >$ rozpoznający ten język. Niech $k = |Q|$.

Lemat 1. *Jeżeli $w^n \in L$ dla $n \geqslant k$, wtedy istnieje również $m < k$ takie, że $w^m \in L$.*

Dowód. Załóżmy, nie wprost, że $\forall_{i<n} w^i \notin L$ inaczej mówiąc $\hat{\delta}(q_0, w^i) \notin F$. Popatrzmy na następujący ciąg stanów $q_0, \hat{\delta}(q_0, w), \hat{\delta}(q_0, w^2), ..., \hat{\delta}(q_0, w^n)$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją takie $i < j$, takie że

$$\hat{\delta}(q_0, w^i) = \hat{\delta}(q_0, w^j)$$

ponieważ elementów ciągu jest $n + 1 > k$, a stanów w automacie k.
W takim razie

$$\hat{\delta}(q_0, w^{n-(j-i)}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w^i), w^{n-j}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w^j), w^{n-j}) = \hat{\delta}(q_0, w^n)$$

a więc $w^{n-(j-i)} \in L$, co jest sprzeczne z założeniem. $\square$

Korzystając z Lematu 1 :

$$\{w : \exists_{n\in\mathbb{N}} w^n \in L\} = \{w : \exists_{n\in\{0,1,...k-1\}} w^n \in L\}$$

Nazwijmy ten język L'.
Skonstruujemy DFA $B =< \Sigma, Q', q_0', F', \delta' >$, rozpoznający język L'.
Niech

$$Q' = \{q_0, q_1, ..., q_{k-1}\}^k$$
$$q_0' =< q_0, q_1, ..., q_{k-1} >$$
$$\hat{\delta}'(< q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_{k-1}} >, w) =< \hat{\delta}(q_{i_0}, w), \hat{\delta}(q_{i_1}, w), ..., \hat{\delta}(q_{i_{k-1}}, w) >$$

Zdefiniujmy następujące operatory :

$$
\begin{aligned}
[*] :& Q^k \times \{0, ..., k-1\} \to Q \\
\text{tak, że : } & < q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_{k-1}} > [x] = q_{i_x} \\
\circ :& Q^k \times Q^k \to Q^k \\
\text{tak, że : } & < q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_{k-1}} > \circ q'_2 =< q'_2[i_0], q'_2[i_1], ..., q'_2[i_{k-1}] > \\
q'^1 =& q' \\
q'^m =& q' \circ q'^{m-1}
\end{aligned}
$$

Jaki jest intuicyjny sens tych operatorów?

Proszę dodać intuicyjny opis. Naprawdę trudo to zrozumieć.

Ufff. To jest strasznie formalne.
Wolałbym, żeby rozwiązania były
pisane na wyższym poziomie abstrakcji.

Lemat 2. *Jeżeli*

$$
\begin{aligned}
< q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_{k-1}} > &= \hat{\delta}'(q'_0, w_1) \\
q'_2 &= \hat{\delta}'(q'_0, w_2)
\end{aligned}
$$

wtedy

$$< q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_{k-1}} > \circ q'_2 = \hat{\delta}'(q'_0, w_1 w_2)$$

Dowód.

$$
\begin{aligned}
< q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_{k-1}} > \circ q'_2 &=< q'_2[i_0], q'_2[i_1], ..., q'_2[i_{k-1}] > \\
&=< \hat{\delta}(q_{i_0}, w_2), \hat{\delta}(q_{i_1}, w_2), ..., \hat{\delta}(q_{i_{k-1}}, w_2) > \\
&= \hat{\delta}'(< q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_{k-1}} >, w_2) \\
&= \hat{\delta}'(< \hat{\delta}(q_0, w_1), \hat{\delta}(q_1, w_1), ..., \hat{\delta}(q_{k-1}, w_1) >, w_2) \\
&=< \hat{\delta}(q_0, w_1 w_2), \hat{\delta}(q_1, w_1 w_2), ..., \hat{\delta}(q_{k-1}, w_1 w_2) > \\
&= \hat{\delta}'(q'_0, w_1 w_2)
\end{aligned}
$$

□

Korzystając z wyżej zdefiniowanych operatorów oraz faktu, że zbiór $\{1, ..., k-1\}$ jest skończony, definiujemy F', jako:

$$F' = \{q' \in Q' : \exists_{y \in \{1,...,k-1\}} q'^y[0] \in F\}$$

Pokażemy, że $w \in L' \Leftrightarrow \hat{\delta}'(q'_0, w) \in F'$.

F można opisać intuicyjnie.

Dowód. Korzystając z lematu 2 $\hat{\delta}'(q'_0, w)^y[0] = \hat{\delta}'(q'_0, w^y)[0] = \hat{\delta}(q_0, w^y)$.

$$
\begin{aligned}
w \in L' &\Leftrightarrow \exists_{y \in \{1,...,k-1\}} w^y \in L \\
&\Leftrightarrow \exists_{y \in \{1,...,k-1\}} \hat{\delta}(q_0, w^y) \in F \\
&\Leftrightarrow \exists_{y \in \{1,...,k-1\}} \hat{\delta}'(q'_0, w)^y[0] \in F \\
&\Leftrightarrow \hat{\delta}'(q_0, w) \in F'
\end{aligned}
$$

□

Wierze, że jest dobrze, ale trudno było to sparsować.