

## Zadanie 55.

Maciej Korpalski

**Treść:** Czy zbiór takich słów nad alfabetem  $\{0, 1\}$ , które mają parzystą długość, i w których pierwszej połowie jest przynajmniej tyle samo jedynek, co w drugiej połowie, jest bezkontekstowy?

**Rozwiązanie:** Język z treści zadania (nazwijmy go  $L$ ) nie jest bezkontekstowy. Pokażemy to używając lematu o pompowaniu.

Założmy nie wprost, że język  $L$  jest bezkontekstowy. Wtedy niech  $p$  będzie stałą z lematu o pompowaniu dla języka  $L$ . Rozważmy słowo  $w = 0^p 1^p 0^p 1^p \in L$ . Wiemy, że można je podzielić na pięć części  $w = uvxyz$  takich, że dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  mamy  $uv^kxy^kz \in L$ ,  $|vxy| \leq p$  i  $|vy| > 0$ .

Mamy kilka przypadków na to, gdzie mogą znaleźć się podślowa  $v, x, y$  (należy tu zauważyć, że skoro  $|vxy| \leq p$ , to słowa  $v, y$  nie mogą zawierać takich samych znaków z różnych połów słowa  $w$ ).

- Słowa  $v, y$  zawierają jedynie zera z pierwszej części słowa  $w$ .  
Rozważmy słowo  $w_1 = uvvxyyz$ . Jeśli słowo  $w_1$  jest parzystej długości, to ma długość przynajmniej  $4p + 2$ , w tym  $2p$  jedynek. Końcowe  $3p$  znaków słowa  $w_1$  są takie same jak słowa  $w$  ( $y$  zawiera się w pierwszych  $p$  znakach, czyli  $|vxy| \leq p$ ). Skoro długość drugiej połowy słowa  $w_1$  to przynajmniej  $2p + 1$ , musi ona zawierać przynajmniej  $p + 1$  jedynek (końcowe  $p$  oraz część środkowych). Mamy więc  $w_1 \notin L$ .
- W przynajmniej jednym ze słów  $v, y$  znajduje się jedynka z pierwszej połowy słowa  $w$ .  
Rozważmy słowo  $w_1 = uxz$ . Długość nowego słowa wynosi przynajmniej  $3p$  (ponieważ  $|w_1| = 4p - |uv| \geq 3p$ ). W takim razie żadna z  $p$  jedynek z końca słowa  $w$  nie może się znaleźć w pierwszej połowie słowa  $w_1$ . W słowie  $w_1$  jest mniej niż  $2p$  jedynek, przy czym przynajmniej  $p$  z nich jest w drugiej jego połowie. Mamy więc  $w_1 \notin L$ .

- Słowa  $v, y$  zawierają jedynie zera z drugiej połowy słowa  $w$ .  
Rozważmy słowo  $w_1 = uxz$ . Słowo  $w_1$  ma długość mniejszą niż  $4p$ , więc jego pierwsza połowa będzie miała mniej niż  $2p$  znaków. W takim razie znajdzie się w niej mniej niż  $p$  jedynek (ponieważ znajduje się w niej  $p$  zer z początku słowa  $w$ ). Skoro jedynek w słowie  $w_1$  jest  $2p$ , a w pierwszej połowie jest ich mniej niż  $p$ , to mamy  $w_1 \notin L$ .
- W przynajmniej jednym ze słów  $v, y$  znajduje się jedynek z drugiej połowy słowa  $w$ .  
Rozważmy słowo  $w_1 = uvvxyz$ . Słowo  $w_1$  ma długość co najwyżej  $5p$ , więc pierwsza połowa tego słowa ma długość mniejszą niż  $3p$ . Jeśli  $|uv| \geq 3p$ , to pierwsza połowa  $w_1$  odpowiada pewnemu początkowi słowa  $w$ , więc ma co najwyżej  $p$  jedynek. W przeciwnym przypadku  $v$  musi zawierać same zera oraz  $|uvvxy| \geq 3p$  i pierwszej połowie słowa  $w_1$  znów występuje co najwyżej  $p$  jedynek, podczas gdy w całym słowie jest ich więcej niż  $2p$ , czyli  $w_1 \notin L$ .

Przy czym w każdym przypadku może się też zdarzyć, że słowo, którego nienależenie do  $L$  postulujemy jest nieparzystej długości. Wtedy tym bardziej nie jest ono elementem języka  $L$ .

Skoro niezależnie od położenia słów  $v, y$  słowa  $w$  nie można pompować wewnątrz języka  $L$ , to język  $L$  nie jest bezkontekstowy.