Języki formalne i złożoność obliczeniowa
zadanie 74

Agnieszka Pawicka

28 marca 2020

Treść

zadanie 74
Pokaż, że istnieje konfluentny język bezkontekstowy, który nie jest jednostajnie konfluentny.

Definicje Język $A \subseteq \Sigma^*$ jest kofluentny, gdy

$$\forall_{w,v \in \Sigma^*} \exists_{x \in \Sigma^*} \forall_{y \in \Sigma^*} (wxy \in A \Leftrightarrow vxy \in A)$$

Język $A \subseteq \Sigma^*$ jest jednostajnie kofluentny, gdy istnieje stała $c \in N$, że:

$$\forall_{w,v \in \Sigma^*} \exists_{x \in \Sigma^*} (|x| \leq c \wedge \forall_{y \in \Sigma^*} (wxy \in A \Leftrightarrow vxy \in L))$$

Rozwiązanie

Językiem spełniającym warunki zadania jest $L \subseteq \{a, b\}^*$, zadany jako:

$$L = \{a^n bw | w \in \{a, b\}^* \wedge |w| \geq n\}$$

Szkic dowodu

1. Pokażę, że L jest językiem bezkontekstowym.
2. Wprowadzę lemat, dotyczący własności niektórych języków konfluentnych (w tym języka L).
3. Pokażę, że L jest konfluentny.
4. Pokażę, że L nie jest jednostajnie konfluentny.

1. L jest bezkontekstowy

W celu udowodnienia, że L jest bezkontekstowy pokażę gramatykę bezkontekstową G i udowodnię, że $L_G = L$.

Gramatyka G Niech

$$G =< \{a, b\}, \{A, W\}, A, \Pi >,$$

gdzie

$$\Pi = \{A \to aAa|aAb|bW,$$
$$W \to Wa|Wb|\epsilon\}$$

Równość L_G i L

$L \subseteq L_G$

Weźmy dowolne słowo $v \in L$. Wiemy, że v jest postaci $v = a^n bw$, gdzie $|w| \geq n$. Niech $|w| = m \geq n$ oraz niech w_i będzie i-tą (licząc od 1) literką podsłowa w. Weźmy gramatykę G i następujący ciąg produkcji:

$$A \to aAw_m,$$
$$A \to aAw_{m-1},$$
$$\dots$$
$$A \to aAw_{m-n+1},$$
$$A \to bW,$$
$$W \to Ww_{m-n}$$
$$\dots$$
$$W \to Ww_1$$
$$W \to \epsilon$$

Jak łatwo zauważyć, otrzymene słowo jest naszym v - zaczyna się od n liter a, następnie występuje litera b, później słowo w. Stąd $L \subseteq L_G$.

$L_G \subseteq L$

Weźmy dowolne słowo $v \in L_G$. Niech $P_1, P_2 ... P_m$ - ciąg produkcji z których powstało v. Niech P_k będzie produkcją $A \to bW$ (ta produkcja musiała wystąpić dokładnie raz).

Produkcje $P_1, \dots P_{k-1}$ są typu $A \to aAa$ lub $A \to aAb$

Zauważmy, że po produkcjach $P_1, P_2 \dots P_k$ otrzymaliśmy ciąg $a^{k-1}bWw$, gdzie $w \in \{a, b\}^*, |w| = k - 1$.

Zauważmy też, że dalsze produkcje będą wyłącznie doklejać litery jako prefiks podsłowa w - czyli $\exists_{w \in \{a,b\}^*}(|w| \geq k - 1 \land v = a^{k-1}bw)$.

Stąd $v \in L$.

Zatem $L_G \subseteq L$

2. Lemat (1)

Jeżeli język $J \subseteq \Sigma^*$ spełnia warunki:

- (a) $\forall_{w \in J} \forall_{x \in \Sigma^*} wx \in J$
- (b) $\forall_{w \in \Sigma^*} \exists_{x \in \Sigma^*} wx \in J$

to jest konfluentny.

dowód:
Niech J spełnia warunki z lematu. Weźmy dowolne $w, v \in \Sigma^*$. Wiemy, że

$$\exists_{x \in \Sigma^*} wx \in J \qquad (b)$$

oraz że

$$\exists_{y \in \Sigma^*} (vx)y \in J \qquad (b)$$

Niech $x \in \Sigma^*$ spełnia $wx \in J$ oraz $y \in \Sigma^*$ spełnia $vxy \in J$.

Wiemy, że dla $wx \in J$

$$\forall_{z \in \Sigma^*} wxz \in J \qquad (a)$$

W takim razie $wxy \in J$.
Wobec tego

$$\forall_{z \in \Sigma^*} wxyz \in J \land vxyz \in J \qquad (a)$$

Stąd

$$\forall_{z \in \Sigma^*} wxyz \in J \Leftrightarrow vxyz \in J$$

czyli

$$\forall_{w,v \in \Sigma^*} \exists_{u_{xy} \in \Sigma^*} \forall_{z \in \Sigma^*} (wu_{xy}z \in J \Leftrightarrow vu_{xy}z \in J)$$

Zatem J jest konfluentny.

3. L jest konfluentny

dowód Pokażę, że L spełnia warunki lematu (1).
Warunek (a):
Weźmy dowolne słowo $v \in L$.

$$\exists_{w \in \{a,b\}^*} (v = a^n bw \land |w| \geq n)$$

Weźmy dowolne słowo $x \in \{a,b\}^*$. Gdy $v = a^n bw$, to

$$vx = a^n bwx, wx \in \{a,b\}^*, |wx| \geq n$$

więc $vx \in L$

Warunek (b):
Weźmy dowolne słowo $v \in \{a,b\}^*$. Jeśli $v \in L$ to warunek (b) wynika trywialnie z warunku (a). Załóżmy więc, że $v \notin L$.

Rozważmy przypadki:

- $v = a^n bw$, gdzie $|w| = m < n$.
  Zauważmy, że $vb^{n-m} \in L$
- $v = a^n$
  Zauważmy, że $vb^{n+1} \in L$

Zatem $\forall_{w \in \{a,b\}^*} \exists_{x \in \{a,b\}^*} wx \in L$

L spełnia warunki (a) i (b) lematu (1) $\Rightarrow L$ jest konfluentny.

4. L nie jest jednostajnie konfluentny

dowód (nie wprost)
Załóżmy, że L jest jednostajnie konfluentny. Niech $c \in N$ będzie stałą, dla której:

$$\forall_{w,v \in \Sigma^*} \exists_{x \in \Sigma^*} (|x| \leq c \wedge \forall_{y \in \Sigma^*} (wxy \in L \Leftrightarrow vxy \in L))$$

Weźmy $w = a^c, v \in L$. Zauważmy, że $\forall_{x \in \Sigma^*} \forall_{y \in \Sigma^*} vxy \in L$. Musimy zatem dopisać takie x do w, żeby $wx \in L$.
Zauważmy, ze najkrótsze x spełniające $wx \in L$ musi mieć $c + 1$ liter ($wx = a^c bu : |u| \geq c$).
Wobec tego dla każdej stałej c istnieją $w \in \{a, b\}^*$, $v \in L$, takie, że

$$\forall_{x \in \{a,b\}^* \wedge |x| \leq c} (wx \notin L \wedge vx \in L)$$

Zatem L nie jest jednostajnie konfluentny.