Zadanie 55

GdziejestNemo?

28 marca 2020

Treść zadania

Czy zbiór takich słów nad alfabetem $\{0, 1\}$, które mają parzystą długość, i w których pierwszej połowie jest przynajmniej tyle samo jedynek, co w drugiej połowie, jest bezkonteksotowy?

Rozwiązanie

Nazwijmy język z zadania językiem L. Pokażę, że dla języka L nie jest spełniony lemat o pompowaniu dla języków bezkontekstwych, a zatem ten język nie jest bezkontekstowy.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że język L jest językiem bezkontekstowym, a zatem zachodzi dla niego lemat o pompowaniu. Niech p będzie stałą z lematu o pompowaniu dla tego języka.

Popatrzmy na słowo $w = 0^{p+1}1^{p+1}0^{p+1}1^{p+1}$. Z lematu o pompowaniu wynika, że istnieją u, v, x, y, z, takie że spełnione są następujące zależności:

$$\begin{aligned} 0^{p+1}1^{p+1}0^{p+1}1^{p+1} &= uvxyz \\ |vy| &> 0 \\ |vxy| &\leqslant p \\ \forall_i\ uv^ixy^iz &\in L \end{aligned}$$

Popatrzmy na możliwe postacie takiego podziału słowa w. Zauważmy, że aby słowa powstałe w wyniku pompowania mogły należeć do języka L, $|vy|$ musi być parzyste.

1.

$$\begin{aligned} u &= 0^{p+1-a} \\ vy &= 0^a1^b \\ |z| &\geqslant 2p+2 \\ a+b &\leqslant p \\ a &> 0 \end{aligned}$$

Słowa takie mogą wyglądać w jeden z następujących sposobów:
$\underbrace{0000...0000}_{u}\underbrace{0000...0000}_{vxy}\underbrace{...00001^{p+1}0^{p+1}1^{p+1}}_{z}$,

$\underbrace{0000...0000}_{u}\underbrace{0000...0000}_{vx}\underbrace{...000111...}_{y}\underbrace{...1110^{p+1}1^{p+1}}_{z}$,

$\underbrace{0000...0000}_{u}\underbrace{0000...0000}_{v}\underbrace{...000111...}_{x}\underbrace{1111...1111}_{\text{y}}\underbrace{...1110^{p+1}1^{p+1}}_{z}$ lub

$\underbrace{0000...0000}_{u}\underbrace{...000111...}_{v}\underbrace{1111...1111}_{\text{xy}}\underbrace{...1110^{p+1}1^{p+1}}_{z}$.

Popatrzmy na słowo $w' = uv^2xy^2z$. Połowa tego słowa występuje po $2p+2+\frac{a+b}{2}$-tym znaku.
W pierwszej połowie słowa w' jest $p+1+a$ zer , a w drugiej $p+1$. Ponieważ obie połówki mają tyle samo liter, zatem w pierwszej połowie jest mniej jedynek i $w' \notin L$.

$w' = \underbrace{0000...0000}_{\text{p+1+a zer}}\ \underbrace{1111...1111}_{p+1+\frac{b-a}{2}\text{ jedynek}}\ |\ \underbrace{1111...1111}_{\frac{a+b}{2}\text{ jedynek}}\underbrace{0000...0000}_{\text{p+1 zer}}\underbrace{1111...1111}_{\text{p+1 jedynek}}$

2.

$$
\begin{aligned}
u &= 0^{p+1}1^j \\
vy &= 1^{2a} \\
|z| &\geqslant 2p+2 \\
2a+j &\leqslant p \\
a &> 0
\end{aligned}
$$

Słowa takie będą wyglądały następująco
$\underbrace{0^{p+1}111...}_{u}\underbrace{1111...1111}_{vxy}\underbrace{...1110^{p+1}1^{p+1}}_{z}$.

Popatrzmy na słowo $w' = uv^0xy^0z$. Połowa tego słowa występuje po $2p+2-a$-tym znaku.
W pierwszej połowie słowa w' jest $p+1-2a$ jedynek , a w drugiej $p+1$, zatem $w' \notin L$.

$w' = \underbrace{0000...0000}_{\text{p+1 zer}}\ \underbrace{1111...1111}_{p+1-2a\text{ jedynek}}\ \underbrace{000...000}_{a\text{ zer}}\ |\ \underbrace{0000...0000}_{\text{p+1 - a zer}}\underbrace{1111...1111}_{\text{p+1 jedynek}}$

3.

$$
\begin{aligned}
u &= 0^{p+1}1^{p+1-a} \\
vy &= 1^a0^b \\
|z| &< 2p+2 \\
a+b &< p \\
a,b &> 0
\end{aligned}
$$

Słowa takie mogą wyglądać:
$\underbrace{0^{p+1}111...}_{u}\underbrace{111...111}_{vx}\underbrace{...111000...}_{y}\underbrace{...0001^{p+1}}_{z}$,

$\underbrace{0^{p+1}111...}_{u}\underbrace{111...111}_{v}\underbrace{...111000...}_{x}\underbrace{0000...0000}_{y}\underbrace{...0001^{p+1}}_{z}$ lub
$\underbrace{0^{p+1}111...}_{u}\underbrace{...111000...}_{v}\underbrace{0000...0000}_{xy}\underbrace{...0001^{p+1}}_{z}$.
Popatrzmy na słowo $w' = uv^0xy^0z$. Połowa tego słowa występuje po $2p+2-\frac{a+b}{2}$-tym znaku.
Jeżeli $a >= b$ wtedy pierwsza połowa słowa ma $p+1-a$ jedynek, a druga $p+1$ zatem takie $w' \notin L$.
$w' = \underbrace{0000...0000}_{\text{p+1 zer}}\ \underbrace{1111...1111}_{p+1-a \text{ jedynek}}\ \underbrace{000...000}_{a-\frac{a+b}{2} \text{ zer}} \mid \underbrace{0000...0000}_{p+1-a+\frac{a+b}{2}\text{zer}}\ \underbrace{1111...1111}_{\text{p+1 jedynek}}$
Jeżeli $a < b$ wtedy pierwsza połowa słowa ma $p+1-\frac{a+b}{2}$ jedynek, a druga $p+1+\frac{a+b}{2}-a$ zatem także $w' \notin L$.
$w' = \underbrace{0000...0000}_{\text{p+1 zer}}\ \underbrace{1111...1111}_{p+1-\frac{a+b}{2} \text{ jedynek}} \mid \underbrace{111...111}_{\frac{a+b}{2}-a \text{ jedynek}}\ \underbrace{0000...0000}_{p+1-b \text{ zer}}\underbrace{1111...1111}_{\text{p+1 jedynek}}$

4.

$$\begin{aligned} z &= 0^{p+1-2a}1^{p+1} \\ vy &= 0^{2a} \\ |u| &\geqslant 2p+2 \\ 2a &< p \\ a &> 0 \end{aligned}$$

Przypadek symetryczny do przypadku 2.

5.

$$\begin{aligned} z &= 1^{p+1-b} \\ vy &= 0^a1^b \\ |u| &\geqslant 2p+2 \\ a+b &< p \\ a &> 0 \end{aligned}$$

Przypadek symentryczny do przypadku 1.

□

Zatem dla dowolnego podziału słowa w nie jest spełniony lemat o pompowaniu, więc język L nie jest bezkontekstowy.