Zadanie 81

Maciej Korpalski

Treść: Niech $A \subseteq \{(,),[,],\langle,\rangle\}^*$ będzie językiem poprawnie rozstawionych nawiasów trzech rodzajów zaś $B \subseteq \{(,),[,]\}^*$ językiem poprawnie rozstawionych nawiasów dwóch rodzajów. Pokaż że $A \leqslant_{reg} B$.

Przypomnienie definicji: Dla $A \subseteq \Sigma^*, B \subseteq \Sigma_1^*$ mamy $A \leqslant_{reg} B$ wtw, gdy istnieje transducer $\mathcal{T}$ taki, że $\forall w \in \Sigma^*\ w \in A \iff f_{\mathcal{T}}(w) \in B$.

Dowód. Skonstruujmy transducer Mealy'ego, który zdefiniuje funkcję ze zbioru A w zbiór B.

Niech $\mathcal{T} = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma \rangle$, gdzie:

- $\Sigma = \{(,),[,],\langle,\rangle\}$,
- $\Sigma_1 = \{(,),[,]\}$,
- $Q = \{q_0\}$,
- $\delta = id_Q$
-
  - $\sigma(q_0, () = (($,
  - $\sigma(q_0,)) =))$,
  - $\sigma(q_0, [) = [[$,
  - $\sigma(q_0,]) =]]$,
  - $\sigma(q_0, \langle) = ([$,
  - $\sigma(q_0, \rangle) =])$.

Mówiąc potocznie, automat zmienia każdy nawias z Σ_1 w dwa takie nawiasy, a nawiasy spoza Σ_1 zmienia w pary różnych nawiasów otwierających lub zamykających.

Należy pokazać, że $\forall w \in A\ f_{\mathcal{T}}(w) \in B$ oraz $\forall w \in \Sigma^*\ f_{\mathcal{T}}(w) \in B \Rightarrow w \in A$.

W celu pokazania pierwszej implikacji przeprowadźmy indukcję względem rozmiaru nawiasowań $w \in A$. Przypadek bazowy to nawiasowanie puste, które automat przekształci na nawiasowanie puste, które jest poprawnym nawiasowaniem w B.

Niech $A_n = \{w \in A : |w| \leqslant 2n\}$. Załóżmy, że dla każdego $w \in A_n$ zachodzi $f_{\mathcal{T}}(w) \in B$. Dowolne nawiasowanie $v \in A_{n+1}$ można przedstawić w jednej z dwóch postaci:

- $v = v'v''$, dla $v', v'' \in A_n$, mamy wtedy $f_{\mathcal{T}}(v) = f_{\mathcal{T}}(v')f_{\mathcal{T}}(v'') \in B$,

- $av'a'$ dla $v' \in A_n$ oraz $a, a' \in \Sigma$ (gdzie a jest nawiasem otwierającym, a' zamykającym tego samego typu) i w takim przypadku
  $f_{\mathcal{T}}(v) = f_{\mathcal{T}}(a) f_{\mathcal{T}}(v') f_{\mathcal{T}}(a') \in B$, ponieważ $f_{\mathcal{T}}(a) f_{\mathcal{T}}(a') \in B$.

W obu przypadkach korzystamy z hipotezy indukcyjnej oraz z faktu, że automat ma tylko jeden stan. Powoduje to, że jego działanie się nie zmienia po wczytaniu dowolnego wejścia. Rozważenie obu tych przypadków pokazuje pierwszą implikację.

W celu pokazania drugiej implikacji weźmy $w \in \Sigma^* \setminus A$ i pokażmy, że $f_{\mathcal{T}}(w) \notin B$. Są dwie możliwości (nie są one rozłączne, ale pokrywają możliwe przypadki):

- w nawiasowaniu w jest zbyt dużo nawiasów otwierających.
  Liczba par nawiasów w słowie $f_{\mathcal{T}}(w)$ odpowiada liczbie nawiasów w słowie w, więc w nawiasowaniu $f_{\mathcal{T}}(w)$ też jest zbyt dużo nawiasów otwierających, czyli $f_{\mathcal{T}}(w) \notin B$.

- w nawiasowaniu w wystąpił zły nawias zamykający (tzn. nie zamykający ostatniego niezamkniętego otwartego nawiasu).
  W tej sytuacji nastąpi identyczna kolizja w nawiasowaniu $f_{\mathcal{T}}(w)$, czyli $f_{\mathcal{T}}(w) \notin B$.

Co kończy dowód. $\square$