Zadanie 15.

Wiktor Garbarek

20 marca 2020

Zadanie 15. Dodanie do definicji wyrażeń regularnych pozwolenia na użycie symbolu $\cap$, oznaczającego przekrój języków nie umożliwia reprezentowania nowych zbiorów, wyrażenia jednak stają się krótsze.

Udowodnij, że użycie $\cap$ może wykładniczo skrócić wyrażenie.

Wskazówka: rozważyć język składający się z 1 słowa $(\dots((a_0a_1)^2a_2)^2\dots)^2$.

Dowód. Zdefiniujmy, według wskazówki, następujący ciąg słów nad alfabetem $\Sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$

$$w_1 = (a_0a_1)^2$$
$$w_k = (w_{k-1}a_k)^2$$

Niech $L_k = \{w_k\}$. Łatwo zauważyć, że gdybyśmy użyli operatorów $+$ lub $*$ to dostalibyśmy język o więcej niż jednym słowie. Zatem najkrótszym wyrażeniem opisującym język L_k będzie po prostu słowo w_k, a jego długość możemy opisać następującą zależnością rekurencyjną

$$|w_k| = |w_{k-1}a_kw_{k-1}a_k| = 2|w_{k-1}| + 2$$

co po rozwiązaniu daje nam $|w_k| = 3 \cdot 2^k - 2 = \Theta(2^k)$.

Wskażmy teraz wyrażenie o długości wielomianowej względem k wykorzystujące $\cap$, które definiuje L_k. Niech

$$\phi_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1}$$

Łatwo zauważyć, że $L_{\phi_k^*}$ to wszystkie słowa nad alfabetem Σ, w których nie występują litery $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$.

Pokażemy, że szukanym wyrażeniem opisującym L_k jest

$$\psi_k = (\psi_{k-1}a_k)^* \cap (\phi_k^*a_k\phi_k^*a_k)$$

gdzie $\psi_1 = w_1$.

Udowodnimy indukcyjnie, że ψ_k jest wyrażeniem regularnym opisującym tylko słowo w_k. Podstawa indukcji jest oczywista. Zauważmy zatem, że wyrażenie $(\psi_{k-1}a_k)^*$, zgodnie z założeniem indukcyjnym, opisuje wszystkie słowa postaci $(w_{k-1}a_k)^i$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$. Łatwo zauważyć, że w słowie w_{k-1} nie występują litery $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$. Zatem wystarczy tylko zapewnić, że $i = 2$ lub równoważnie, zapewnić, że są dokładnie dwie litery a_k. Weźmy zatem wyrażenie $(\phi_k^* a_k \phi_k^* a_k)$. W słowach pasujących do tego wyrażenia litera a_k może wystąpić dokładnie dwa razy. Zatem ψ_k definiuje słowo $(w_{k-1}a_k)^2 = w_k$, co kończy dowód indukcyjny.

Pokażemy też, że faktycznie długość wyrażenia ψ_k jest wielomianowa względem k

$$\begin{aligned}
|\psi_k| &= |\psi_{k-1}a_k| + 2(|\phi_k| + |a_k|) \\
&= |\psi_{k-1}| + 2k + 3 \\
&\ldots \\
&\leqslant (k-1)(2k+3) + |\psi_1| = \Theta(k^2)
\end{aligned}$$

gdzie oczywiście $|\phi_k| = k$

$\square$