**Zadanie 1 [Symetryzacja]**

Trudność: łatwe Punktów: 2

Mówimy, że wielomian $P\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *dobrze symuluje* funkcję $S\colon [M]^k \to \{0,1\}$, jeśli

$$\forall \mathbf{x} \in [M]^k,\ \left|P(\mathbf{x}) - S(\mathbf{x})\right| \leqslant \frac{1}{3}.$$

O naszej funkcji $S$ wiemy, że jej wynik nie zależy od kolejności argumentów. Pokaż, że jeśli $P$ dobrze symuluje $S$, to istnieje również wielomian $Q$ o $\deg(Q) \leqslant \deg(P)$ dobrze symulujący $S$, którego wynik nie zależy od kolejności argumentów.

**Zadanie 2**

Trudność: średnie Punktów: 3

Pokaż, że dla każdego *symetrycznego* wielomianu $Q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ istnieje wielomian $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $\deg(q) \leqslant \deg(Q)$ spełniający

$$\forall \mathbf{x} \in \{0,1\}^k,\ Q(\mathbf{x}) = q\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right).$$

**Wskazówka:** Trzeba zajrzeć w trzewia wielomianu $Q$ i zrozumieć, że jest w nich symetria.

**Zadanie 3 [Principle of Deferred Measurement]**

Trudność: trudne Punktów: 5

W danym obwodzie kwantowym $C$ zmierzono wartość jednego z qubitów, a następnie na podstawie wyniku tego pomiaru dokonano (lub nie) jakichś operacji unitarnych na pozostałych qubitach.

Pokaż, że można zbudować równoważny obwód $C'$ mający jeden qubit więcej, i dokonujący tego pomiaru na końcu obwodu.

**Wskazówka:** Nowy qubit po splątaniu się z tym, który miał być zmierzony, powinien polecieć na Marsa.

# Problem Kolizji

W *Problemie Kolizji* dostajemy (jak zwykle w postaci obwodu $O_f$) funkcję $f\colon [N] \to [M]$, o której obiecano nam, że

(i) jest 1-na-1, czyli rożnowartościowa, albo

(ii) jest 2-na-1, czyli każdej wartości odpowiadają dokładnie dwa argumenty.

Naszym zadaniem jest rozpoznanie, czy $f$ jest typu (i) czy (ii). Oczywiście, odpytując $O_f$ jak najmniej razy.

**Zadanie 4**

Trudność: średnie Punktów: 4

Jak (probabilistycznie) rozwiązać problem kolizji klasycznie odpytując $O_f$ tylko $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ razy?

**Wskazówka:** Paradoks urodzin.

**Zadanie 5**

Trudność: trudne Punktów: 4

Jak rozwiązać ten problem kwantowo z $\mathcal{O}(\sqrt[3]{N})$ zapytaniami do $O_f$?

**Wskazówka:** $\sqrt{\frac{N}{N^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{N}$.

## Dolne ograniczenie

Żeby udowodnić, że $\Theta\left(\sqrt[3]{N}\right)$ jest ciasnym ograniczeniem na liczbę zapytań w kwantowym algorytmie rozwiązującym problem kolizji, znowu stosujemy *metodę wielomianową*.

Niech $\tilde{f}_x^v = \mathbb{1}[f(x) = v]$. Z wykładu wiemy, że algorytm o $t$ zapytaniach do $O_f$ zidentyfikuje $f$ jako typu (i) z prawdopodobieństwem $P(\tilde{f})$, gdzie $P\colon \mathbb{R}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ jest wielomianem o stopniu $\deg(P) \leqslant 2t$. Podobnie jak w przypadku problemu Grovera, chcemy z $P$ skonstruować inny, prostszy wielomian, którego wartość będziemy umieli ograniczyć na niektórych wejściach, a którego stopień jest nie większy niż $\deg(P)$.

W tym celu definiujemy (nietypowe) rodziny funkcji $\Phi_S^{a,b}$. Funkcja $h\colon [N] \to [M]$ należy do rodziny, jeśli argumentach z jakiegoś $s$-elementowego zbioru $S \subseteq [N]$ ma $\frac{s}{a}$ różnych wartości, każdą powtórzoną $a$ razy, zaś na pozostałych argumentach przyjmuje $\frac{N-s}{b}$ wartości (innych niż te na $S$), każdą $b$-krotnie.

**Zadanie 6**

Trudność: średnie Punktów: 3

Weźmy dowolny jednomian $I(f) = \tilde{f}_{x_1}^{v_1} \cdot \tilde{f}_{x_2}^{v_2} \cdot \ldots \cdot \tilde{f}_{x_d}^{v_d}$. Niech $X = \{x_1, \ldots, x_d\}$. Niech $V = \{v_1, \ldots, v_d\}$ (niektóre wartości mogą się powtarzać, więc $|V|$ niekoniecznie jest równe $d$).

Weźmy dowolny $U \subseteq V$. Ustalmy $s$, $a$ i $b$. Losujemy zbiór $S$ o rozmiarze $s$, a następnie funkcję $h$ z rodziny $\Phi_S^{a,b}$. Ile wynosi

$$\mathbb{P}_{|S|=s, h\sim\Phi_S^{a,b}}\left[h(X \cap S) \subseteq U \wedge h(X \setminus S) \subseteq V \setminus U\right]$$

(rozwiązanie nie powinno zależeć od niczego poza $s$, $a$, $b$, $|U|$, $|V|$, $N$, $M$, $d$)?

**Zadanie 7**

Trudność: średnie Punktów: 4

Z definicjami jak w poprzednim zadaniu, ile wynosi

$$\mathbb{E}_{|S|=s, h\sim\Phi_S^{a,b}}\left[I(h) \,\middle|\, h(X \cap S) \subseteq U \wedge h(X \setminus S) \subseteq V \setminus U\right]$$

(w rozwiązaniu może pojawić się zbiór $U$).

**Zadanie 8**

Trudność: łatwe Punktów: 2

Niech

$$Q(s, a, b) = \mathbb{E}_{|S|=s, h\sim\Phi_S^{a,b}}\left[P(h)\right].$$

Korzystając z poprzednich dwóch zadań pokaż, że $\deg(Q) \leqslant \deg(P)$.