

Zadanie 43

Udowodnij, że rzut relacji automatycznej jest relacją automatyczną. Innymi słowy, jeśli $R \subseteq N^k$ jest relacją automatyczną, to również relacja $R' = \{r \in N^{k-1} : \exists m \in N \langle r, m \rangle \in R\}$ jest relacją automatyczną (dla uproszczenia możesz przyjąć, że $k = 2$).

Dowód

Dla uproszczenia przyjmę $k = 2$. Dla $k > 2$ konstrukcja i dowód przebiegają analogicznie.

Niech $\mathcal{A} = \langle \Sigma_2, Q, q_0, F, \delta \rangle$ będzie DFA rozpoznającym język L_R .

Zdefiniujmy N DFA $\mathcal{A}' = \langle \Sigma_1, Q, q_0, F', \delta' \rangle$, gdzie $\forall a \in \Sigma_1 (\delta'(q, a, q') \iff \exists b \in \{0, 1\} \delta(q, \langle a, b \rangle) = q')$, oraz $F' = \{q : \exists k \in N, q' \in F \hat{\delta}'(q, 0^k, q')\}$.

Wykażę, że \mathcal{A}' rozpoznaje język $L_{R'}$.

Istotnie, $a_1 a_2 \dots a_n \in L_{R'} \iff R'(l(\Pi_1^1(\bar{a}))) \iff R'(l(\bar{a})) \iff \exists m \in N \langle l(\bar{a}), m \rangle \in R$. Jest to równoważne istnieniu $b_1, b_2, \dots, b_{n'}$, gdzie $n' \geq n$ oraz $\forall i \leq n' b_i \in \{0, 1\}$ takich, że $l(b_1 b_2 \dots b_{n'}) = m$ oraz dla $w = \langle a_1, b_1 \rangle \dots \langle a_n, b_n \rangle \langle 0, b_{n+1} \rangle \dots \langle 0, b_{n'} \rangle$ mamy $w \in L_R$. (ponieważ $l(\Pi_2^1(w)) = l(\bar{a})$ oraz $l(\Pi_2^2(w)) = m$).

Oznacza to, że $\bar{a} \in L_{R'}$ jest równoważne istnieniu w takiego, że $\Pi_2^1(w) = a_1 \dots a_n 0 \dots 0$ oraz $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$.

Z konstrukcji \mathcal{A}' wynika, że $\hat{\delta}'(q_0, \bar{a}) \in F' \iff \exists k \in N, b_1 \in \{0, 1\}, \dots, b_{n+k} \in \{0, 1\}$ takie, że $\hat{\delta}(q_0, \langle a_1, b_1 \rangle \dots \langle a_n, b_n \rangle \langle 0, b_{n+1} \rangle \dots \langle 0, b_{n+k} \rangle) \in F$.

Oznacza to, że istnienie w o własnościach zdefiniowanych powyżej jest równoważne temu, że $\hat{\delta}'(q_0, \bar{a}) \in F'$, co oznacza, że N DFA \mathcal{A}' rozpoznaje $L_{R'}$.

Rozwiązanie jest poprawne i raczej jasne, ale można było je lepiej zredagować.