Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
Lista zadań nr 2

Kwiatek

24 marca 2020

Zadanie 22. Wiadomo, że $\mathbb{L}'$ jest językiem regularnym. Pokaż, że w takim razie język $\{w : \exists n \in \mathbb{N}\ w^n \in \mathbb{L}\}$ jest też językiem regularnym. Przez w^n rozumiemy tu słowo w skonkatenowane ze sobą n razy.

Skonstruujmy DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle, n = |Q|$ rozpoznający język $\mathbb{L}$. Stwórzmy DFA A' który będzie rozpoznawał język $\mathbb{L}'$ podany w zadaniu w następujący sposób:
$A' = \langle \Sigma, Q', \langle q_0, q_1, ...q_n \rangle, F', \delta' \rangle$

Niech stanem w automacie A' będzie krotka n stanów z automatu A. $Q' = \{\langle s_0, s_1, ...s_{n-1} \rangle : s_i \in Q\}$

Niech δ' będzie taka, że z krotki q istnieje produkcja do krotki p po literze a z alfabetu Σ wtedy, gdy dla każdego stanu w krotce q istnieje produkcja po literze a do stanu w krotce p na odpowiadającym miejscu. $\delta'(\langle s_0, s_1, ...s_{n-1} \rangle, a) = \langle \delta(s_0, a), \delta(s_1, a), ...\delta(s_{n-1}, a) \rangle$ produkcja -> przejście

Niech stany akceptujące będą tymi stanami, które zawierają ciąg stanów z Q taki, że każdy kolejny element krotki, zaczynając od stanu na miejscu 0, ma wartość stanu oznaczonego indeksem kolejnego elementu w ciągu oraz ciąg kończy się stanem akceptującym z automatu A. $F' = \{\langle q_{\sigma(0)}, q_{\sigma(1)}, ...q_{\sigma(n-1)} \rangle : \sigma : \{0, 1...n-1\} \mapsto \{0, 1...n-1\} \land \exists m_0...m_n\ m_0 = 0 \land q_{\sigma(m_j)} = q_{m_{j+1}} \land q_{m_n} \in F\}$

Załóżmy, że po wczytaniu słowa w znajdujemy się w stanie akceptującym ($w \in \mathbb{L}'$). Oznacza to, że istnieje ciąg stanów jak w definicji wyżej. Zatem po wczytaniu słowa w (do automatu A) wychodząc ze stanu początkowego znaleźliśmy się w jakimś stanie q_{m_1}. Ale wczytując to samo słowo i startując ze stanu q_{m_1} znaleźliśmy się w stanie q_{m_2}. Ostatecznie przygodę kończymy w stanie q_{m_n}, który jest akceptujący. Oznacza to, że po wczytaniu słowa w^m w automacie A w^n znaleźlibyśmy się w stanie akceptującym - czyli $w^m \in \mathbb{L}$. w^n

W drugą stronę, weźmy w^n akceptowany przez język $\mathbb{L}$. Wtedy po kolejnych wczytaniach słowa w znajdziemy się w kolejnych stanach, które nazwiemy q_{j_i}. Jako, że słowo jest zaakceptowane przez język $\mathbb{L}$, to $q_{j_n} \in F$. Zatem po wczytaniu słowa w do automatu A' znajdziemy się w pewnej krotce stanów. W krotce wystąpi co najmniej raz każdy ze stanów q_{j_i}, co wynika z powyższego wyboru stanów. Dla szczególniejszego uzasadnienia - jesteśmy w jakimś stanie p, wczytując w produkujemy stan r - zatem po wczytaniu w do A' $p-ty$ element w krotce będzie miał stan r. Kontynuując, będzie tam zatem istnieć pewien ciąg stanów m_i - jak w poprzednim paragrafie - będący podciągiem j_i. Zatem krotka będzie spełniać warunek z poprzedniego paragrafu i w będzie rozpoznane przez DFA A'.

To jest nadal niejasne.

Proszę przeczytać rozwiązanie "GdzieJestNemo".