Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa: Zadanie 50

Marcin Witkowski

28 marca 2020

Treść

Czy język $L_3 = \{w \in \{0,1,2\}^* : \neg\exists x \in \{0,1,2\}^* \, w = xx\}$ jest bezkontekstowy?

Rozwiązanie

Pokażemy, że L_3 jest bezkontekstowy. Na początku zauważmy, że język L_3 można tak naprawdę podzielić na dwie klasy słów:

- wszystkie słowa nad $\{0,1,2\}^*$ nieparzystej długości (ponieważ wtedy nie istnieje podział na dwa takie same słowa)
- słowa nad $\{0,1,2\}^*$ parzystej długości, których pierwsza i druga połowa różni się conajmniej jedym znakiem

Możemy zatem zapisać L_3 jako sume dwóch języków L_3^P i L_3^N

$$\begin{aligned} L_3^N &= \{w \in \{0,1,2\}^* : 2 \nmid |w|\} \\ L_3^P &= \{xy : x, y \in \{0,1,2\}^* \, |x| = |y| \wedge x \neq y\} \\ L_3 &= L_3^N \cup L_3^P \end{aligned}$$

Wystarczy teraz pokazać, że L_3^N oraz L_3^P są bezkontekstowe. L_3^N jest bezkontekstowy, ponieważ istnieje wyrażenie regularne $(0+1+2)((0+1+2)(0+1+2))^*$ go opisujące (każdy język regularny jest także bezkontekstowy). Dla L_3^P zdefiniujemy natomiast gramatykę bezkontekstową.

Aby dwie połowy wyrazu w były różne, musi istnieć co najmniej jedna taka para $w_i, w_{i+\frac{|w|}{2}}$, że $w_i \neq w_{i+\frac{|w|}{2}}$. Możemy zatem w zapisać jako $w = \Sigma^\alpha x \Sigma^\beta \Sigma^\alpha y \Sigma^\beta = \Sigma^\alpha x \Sigma^\alpha \Sigma^\beta y \Sigma^\beta$, gdzie $x \neq y$, a Σ to alfabet. Skoro tak, to możemy zbudować gramatykę bezkontekstową $\mathcal{G}$ o takiej postaci

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid BA \mid AC \mid CA \mid BC \mid CB \\
A &\to xAy \mid 0,\ (x,y) \in \{0,1,2\}^2 \\
B &\to xBy \mid 1,\ (x,y) \in \{0,1,2\}^2 \\
C &\to xCy \mid 2,\ (x,y) \in \{0,1,2\}^2
\end{aligned}
$$

$L_3^P \subseteq L_{\mathcal{G}}$ wynika z konstrukcji, pokażemy $L_{\mathcal{G}} \subseteq L_3^P$.

Weźmy dowolny wyraz $w \in L_{\mathcal{G}}$. Do jego wyprowadzenia musiała być użyta jakaś reguła z S – bez straty ogólności załóżmy, że była to $S \to AB$. Wtedy w możemy podzielić na dwa podwyrazy a i b, $w = ab$, gdzie a zostało wyprowadzone z A, a b z B. Jeżeli $|a| = |b|$, to $w \in L_3^P$ ponieważ $a \neq b$ (oba wyrazy mają inną literę na środku). Rozważmy przypadek, gdy $k = |a| \neq |b| = n - k$, $n = |w|$. Mamy wtedy $w_{\frac{k+1}{2}} = a_{\frac{k+1}{2}} \overset{(def)}{\neq} b_{\frac{(n-k)+1}{2}} = w_{\frac{n}{2}+\frac{k+1}{2}}$. Skoro tak, to gdy podzielimy w na dwa wyrazy tej samej długości, będą się one różnić na $\frac{k+1}{2}$ miejscu. Tym samym $w \in L_3^P$. Zatem $L_{\mathcal{G}} \subseteq L_3^P$, czyli $L_{\mathcal{G}} = L_3^P$.

Skoro L_3^P oraz L_3^N są bezkontekstowe, to także L_3 jest bezkontekstowy. $\square$