Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa
Rozwiązanie zadania 41

Aleksander Czeszejko-Sochacki

20 marca 2020

Zadanie 41. Czy relacja dodawania jest automatyczna? Przez relację dodawania rozumiemy tu $\{\langle a, b, c\rangle \in N^3 : a + b = c\}$.

1 Definicja relacji automatycznej

Zdefiniujmy funkcję $l : \{0, 1\}^* \to \mathbb{N}$ jako

$$l() = 0, l(0w) = 2l(w), l(1w) = 2l(w) + 1$$

Dla liczby naturalnej k zdefiniujmy $\Sigma_k = \{0, 1\}^*$ Dla liczb naturalnych $j \leq k$ zdefiniujmy funkcję $\Pi_k^j : \Sigma_k^* \to \{0, 1\}^*$ jako

$$\Pi_k^j(\epsilon) = \epsilon, \Pi_k^j(\langle a_1, a_2, \ldots, a_j \ldots, a_k\rangle w) = a_k \Pi_k^j(w)$$

gdzie $\langle a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_k\rangle \in \Sigma_k$.
Relację $R \subseteq \mathbb{N}^k$ nazwiemy na tej liście zadań automatyczną, jeśli język L_R złożony z tych słów $w \in \Sigma_k^*$, dla których zachodzi $R(l(\Pi_k^1(w)), l(\Pi_k^2(w)), \ldots, l(\Pi_k^k(w)))$, jest regularny.

2 Równoważne zapisanie problemu

Niech R_+ - relacja dodawania. Z definicji relacja dodawania jest automatyczna, gdy

$$L_{R+} = \{w \in \Sigma_3^* : R_+(l(\Pi_3^1(w)), l(\Pi_3^2(w)), l(\Pi_3^3(w)))\} \tag{1}$$

jest regularny. Pokażemy, że istnieje DFA rozpoznający ten język.

Mamy

$$R_+(l(\Pi_3^1(w)), l(\Pi_3^2(w)), l(\Pi_3^3(w))) \equiv [l(\Pi_3^1(w)) + l(\Pi_3^2(w)) = l(\Pi_3^3(w)] \tag{2}$$

Niech $w = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \langle aa_1, aa_2, aa_3 \rangle \langle aaa_1, aaa_2, aaa_3 \rangle \dots$ Zauważmy, że l możemy zapisać jako

$$l(w) = \begin{cases} 0 & w = \epsilon \\ a + 2l(v) & w = av, a \in \Sigma_3, v \in \Sigma_3^* \end{cases}$$

Wtedy

$$[l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) = l(\Pi_3^3(w)] \equiv [a_1 + 2aa_1 + 4aaa_1 + \dots + a_2 + 2aa_2 + 4aaa_2 + \dots = a_3 + 2aa_3 + 4aaa_3 + \dots] \tag{3}$$

co jest równoważne dodawaniu dwóch liczb w zapisie binarnym - dodajemy cyfry dwóch liczb binarnych (od najmniej znaczących) i sprawdzamy, czy w danym momencie wynik dodawania dwóch liczb jest równy trzeciej. Automat, który skonstruujemy, będzie sprawdzał tą cechę - jego stany zapamiętują relację wyniku dodawania dwóch liczb do tej pory do trzeciej liczby (tu przez relację mamy rozumiemy mniejszość, równość, bądź większość).

3 Konstrukcja DFA rozpoznającego R

3.1 Stany

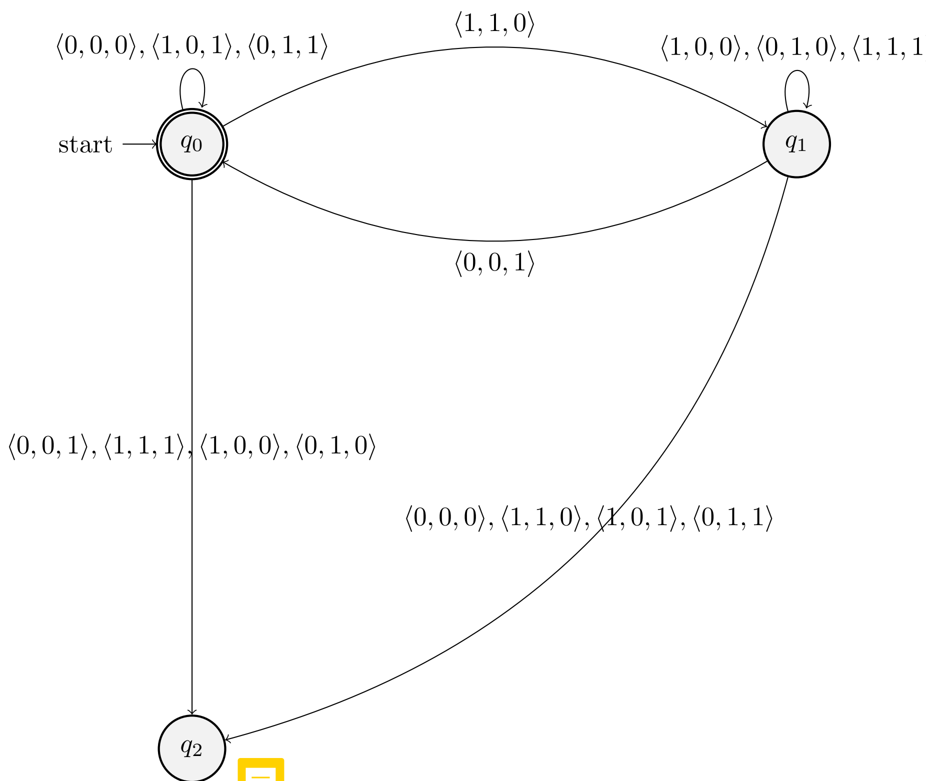
1. q_0, będący jednocześnie stanem początkowym i jedynym stanem akceptującym; stan, w którym zachodzi równość (3)
2. q_1, będący stanem niekakceptującym, ale z którego można przejść do stanu akceptującego; stan, w którym lewa strona (3) jest większa od prawej o 2^n, gdzie n to długość wczytanego słowa
3. q_2, będący stanem, z którego nie można przejść do żadnego innego stanu, w szczególności akceptującego; w tym stanie różnica między lewą a prawą stroną wynosi najwyżej 2^{n-1}, gdzie n - długość wczytanego słowa.

3.2 Schemat

Na rysunku 1.

4 Dowód poprawności

- Stan początkowy jest stanem akceptującym (oczywiste).
- Przejścia ze stanu akceptującego na siebie: to takie, że do lewej strony równości (3) dodajemy tyle samo, co do prawej, co zachodzi dla $\langle 0,0,0 \rangle$, $\langle 1,0,1 \rangle$, $\langle 0,1,1 \rangle$.
- Przejścia ze stanu akceptującego do q_2 - dla liter takich, że po dodaniu parzystości lewej i prawej strony są różne - uzasadnienie: lewa i prawa strona będą różnić się o 2^n, gdzie n to długość dotychczas wczytanego słowa, jednak wczytując nowe litery będzie możliwe dodawanie wyłącznie



Rysunek 1: DFA rozpoznający język generowany przez relację dodawania

większe potęgi dwójki. Zatem nigdy nie zajdzie równość między lewą i prawą stroną. Zachodzi dla $\langle 0,0,1\rangle, \langle 1,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle$.

- Przejście ze stanu akceptującego do q_1 - dla $\langle 1,1,0\rangle$. Do lewej strony dodajemy 2^{n+1}.

- Przejścia ze stanu q_1 na siebie. Lewa strona równania jest o 2^n większa od prawej, gdzie n to długość dotychczas wczytanego słowa. Możemy utrzymać ten niezmiennik (przy wczytaniu kolejnej litery) poprzez dodanie do lewej strony 2^n (litery $\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle$) lub dodanie do lewej strony 2^{n+1}, a do prawej 2^n (litera $\langle 1,1,1\rangle$), wtedy lewa strona będzie większa od prawej o 2^{n+1}.

- Przejście ze stanu q_1 do stanu akceptującego - ponieważ lewa strona jest większa od prawej o 2^n, gdzie n to długość wczytanego słowa, jest tylko jedna możliwość przejścia do stanu akceptującego - dodanie 2^n do prawej strony (litera $\langle 0,0,1\rangle$).

- Przejścia ze stanu q_1 do stanu q_2 - analogia do przejść ze stanu początkowego do stanu q_2 - jeśli nie utrzymamy niezmiennika przebywania w stanie q_1 ani nie wyrównamy różnicy między stronami równania (przechodząc tym samym do stanu akceptującego), to wczytując kolejne litery nigdy nie zniwelujemy różnicy, ponieważ nie będą istniały takie kombinacje liniowe wyższych potęg dwójek. Zachodzi dla liter $\langle 0,0,0\rangle, \langle 1,1,0\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 0,1,1\rangle$.

5 Podsumowanie

Pokazaliśmy tym samym, że po wczytaniu dowolnego wyrazu powyższy DFA sprawdza poprawność równości (3), co jest równoważne z pokazaniem, że relacja R_+ jest automatyczna.

Rozwiązanie jest poprawne. Podoba mi sie rysunek. Wydaję mi się, że
opis mógłby być bardzej zwięzły oraz można napisać wpros, że automat relaizuje
dodawanie pisemne.