Zadanie 59. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje język L_n dający się rozstrzygać niedeterministycznym automatem skończonym o n stanach, ale wymagający słabego automatu z restartem o wykładniczej względem n liczbie stanów. *Wskazówka: nie będzie dla nikogo zaskoczeniem że kandydatem na L_n jest $\{w1v \in \{0,1\}^* : |v| = n-1\}$.*

Rysunek 1.

Rozpiszę trochę dokładniej co dzieje się w dowodzie tego, że RDFA języka $S_n = \{w1v \in \{0,1\}^* : |v| = n-2\}$ musi mieć co najmniej 2^{n-1} stanów.

Lemat 1 (Automat RDFA ze stanami początkowymi $q_0, ...q_{k-1}$ dla każdego prefiksu każdego słowa akceptowanego zrestartuje się co najwyżej $k-2$ razy)
Jeśli słowo spowoduje zrestartowanie się $k-1$ raz, to tym samym stan początkowy wróci do q_0 i RDFA się zapętli. Jeśli słowo w powodujące zapętlenie jest prefiksem słowa wv, to oczywiście automat na słowie wv też się zapętli.

Lemat 2 (W każdym RDFA języka S_n są pewne (osiągalne) stany, z których nie wychodzi już ani jedna ścieżka doprowadzająca do restartu.)
Zał. nie wprost, że lemat nie jest prawdziwy. Czyli innymi słowy, dla pewnego RDFA języka S_n, gdy stoimy w dowolnym osiągalnym stanie, to jesteśmy w stanie zrestartować się doczytując jakieś słowo.

Automat zaczyna w stanie q_0. Wczytujemy pewne słowo w, aby się zrestartować. Automat jest restartowany w stanie q_1 i wczytuje w jeszcze raz. Są dwie możliwości. Albo wychodząc ze stanu q_1 znowu się zrestartowaliśmy (w stanie q_2) i sytuacja się powtarza, albo nie i stoimy w jakimś stanie q_i. Teraz dopisujemy jakieś słowo v i wychodząc ze stanu q_i dochodzimy do instrukcji restartu, a więc sytuacja się powtarza.

Wniosek jest taki, że możemy zmusić automat do dowolnej liczby restartów dopisując kolejne podsłowa, z których każde, gdy jest dopisane, powoduje co najmniej jeden restart. Formalniej, istnieje ciąg słów w_n taki, że słowo $w_1w_2...w_i$ powoduje restart co najmniej i razy. Niech w to takie słowo, którego przeczytanie zapętli RDFA. Sprzeczność z tym, że $w1^n$ jest akceptowane.

Niech q to stan, z którego nie wychodzi już ani jedna ścieżka restartująca automat, a w to słowo, którego przeczytanie doprowadza nas do stanu q. Będąc w stanie q możemy traktować automat już jako zwykły DFA.

Powtarzamy dowód z pierwszego zadania w zbiorze zadań. Słów postaci $w(0+1)^{n-1}$ jest 2^{n-1}. Załóżmy, że stanów RDFA jest mniej niż 2^{n-1}. Z zasady szufladkowej wnioskujemy, ze dla pewnych dwóch różnych słów postaci $w(0+1)^{n-1}$ automat osiąga ten sam stan. Istnieje jakiś największy indeks od końca i (licząc od 1), na którym te dwa słowa się różnią. Dopiszmy do obu z nich słowo 0^{n-1-i}. Jedno z wynikowych słów ma na $n-1$-wszym miejscu 1 a drugie 0. Jedno z nich jest akceptowane, a drugie nie. Sprzeczność z tym, że automat dla obu zatrzymuje się na tym samym stanie.