JFIZO Lista 2

Marzec 2020

Zadanie 22

Mamy pokazać, że jeśli L jest językiem regularnym to również język $L' = \{w : \exists n \in w^n \in L\}$ jest regularny. Wiemy, że L jest regularny, w związku z tym wiemy, że istnieje DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ rozpoznający język L. Będziemy chcieli stworzyć DFA A' rozpoznający język L', aby pokazać jego regularność.

Pomysł na A'

Będziemy chcieli przejść ze słowem w przez automat zaczynając z każdego możliwego stanu, czyli stany automatu A' będą krotkami stanów z automatu A. Dlaczego? Wyobraźmy sobie, że słowo $w^3 \in L$ a zatem po wczytaniu w^3 będziemy w stanie akceptującym. W jakim stanie będziemy po wczytaniu w? Nazwijmy ten stan q_{k_1}. Zauważmy teraz, że żeby sprawdzić w jakim stanie będziemy po słowie w^2 wystarczy sprawdzić, w jakim stanie będziemy po w zaczynając od q_{k_1}. Analogicznie jeśli po wczytaniu słowa w^2 dochodzimy do stanu q_{k_2}, to żeby dowiedzieć się w jakim stanie będziemy po w^3 wystarczy sprawdzić, w jakim stanie będziemy po słowie w zaczynając od q_{k_2}. A zatem, jeśli uda nam się znaleźć ciąg stanów q_{k_0}, q_{k_1} ... taki, że zaczynamy od stanu początkowego z A oraz, że ostatni stan jest akceptujący w A to słowo w będzie zaakceptowane przez A'.

Dobrze by było, jakby pomiędzy intuicją a definicją był opis na poziomie pośrednim.

Definicja A'

$$\Sigma' = \Sigma, \tag{1}$$

$$q_0' =< q_0, q_1, ...q_n >, \tag{2}$$

$$Q' - \text{krotki stanów z A}, \tag{3}$$

$$\delta'(< p_0, p_1, ...p_n >, a) =< \delta(p_0, a), \delta(p_1, a), ...\delta(p_n, a) > \tag{4}$$

$$F' = \{< p_0, p_1, ...p_n >: \exists k_0, k_1, ...k_i \ i < n, q_{k_i} \in F, k_0 = 0, \forall j < i \ p_{k_j} = q_{k_{j+1}}\} \tag{5}$$

Tu by się przydało jakieś wyjaśnienie warunku.

Dowód, że A' generuje L'

1) $w \in L' \Rightarrow w \in L_{A'}$

$w \in L' \Leftrightarrow \exists i \in N$ $w^i \in L$ Muszą więc istnieć w automacie stany $q_{k_0}, q_{k_1}, ...q_{k_i}$ takie, że $\hat{\delta}(w, q_0) = q_{k_1}$, $\hat{\delta}(w, q_{k_1}) = q_{k_2}$, ... $\hat{\delta}(w, q_{k_{i-1}}) = q_{k_i}$ oraz $q_{k_i} \in F$ W takim razie A' po wczytaniu w przyjmie stan $< p_0, p_1, ...p_n >$, gdzie $\forall j < i$ $p_{k_j} = q_{k_{j+1}}$, $k_0 = 0$, $q_{k_i} \in F$, a wtedy mamy ciąg $k_0, k_1, ...k_i$ taki, że spełnia definicję F', czyli $w \in L_{A'}$ A co jeśli i > n? Dowód tej impliacji jest niekompletny. Ten akapit trzeba poprawić.

2) $w \in L_{A'} \Rightarrow w \in L'$

Wiemy, że $w \in L_{A'}$, w takim razie, wiemy, że istnieje odpowiedni ciąg stanów $q_{k_0}, q_{k_1}, ...q_{k_i}$ dla pewnego i∈N , a zatem w^i∈L a więc w∈L'.

Można tu dodać jedno zdanie. Np. "Wiemy, że z q_0 po w A dochodzi do q_{k_1}, q_{k_1} po w dochodzi do ..."

Rozwiązanie jest poprawne, ale są luki w dowodzie.