Rozwiązanie zadania 41

Grzegorz Klocek

March 23, 2020

1 Wprowadzenie

Zdefiniujmy funkcję $l : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ jako $l(\epsilon) = 0$, $l(0w) = 2l(w)$, $l(1w) = 2l(w) + 1$.
Dla liczby naturalnej k zdefiniujmy $\sum_k = \{0,1\}^k$.
Dla liczb naturalnych $j \leqslant k$ zdefiniujmy funkcję $\Pi_j^k : \sum_k^* \to \{0,1\}^*$ jako: $\Pi_j^k(\epsilon) = \epsilon$, $\Pi_j^k(\langle a_1, a_2, ...a_j, ...a_k\rangle w) = a_j\Pi_j^k(w)$, gdzie $\langle a_1, a_2, ...a_j, ...a_k\rangle \in \sum_k$. Relację $R \subseteq N^k$ nazwiemy automatyczną, jeśli język L_R złożony z tych słów $w \sum_k^*$, dla których zachodzi $R(l(\Pi_1^k(w)), l(\Pi_2^k(w)), ...l(\Pi_k^k(w)))$, jest regularny

2 Zadanie

Czy relacja dodawania jest automatyczna? Przez relację dodawania rozumiemy tu $\{\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{N}^3 : a+b = c\}$.

3 Rozwiązanie

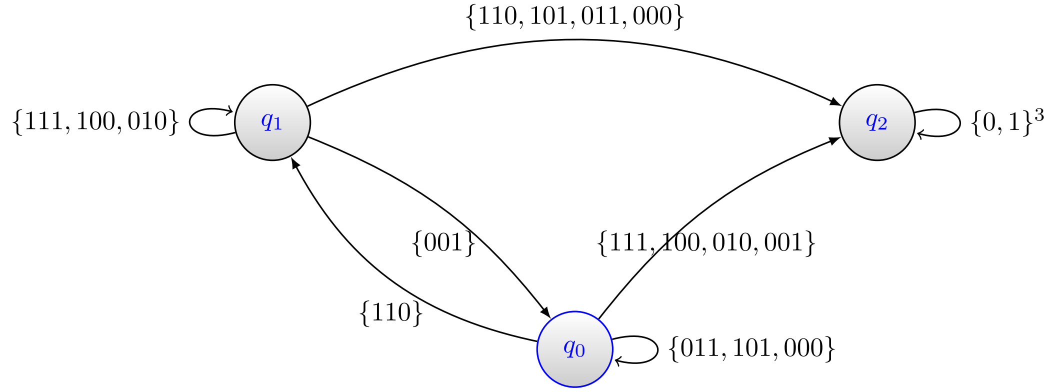
Odpowiedź: Tak, relacja dodawania jest relacją automatyczną. Pokażemy to konstruując deterministyczny automat skończony rozpoznający takie słowa $w \in \sum_3^*$ dla których zachodzi $l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) = l(\Pi_3^3(w))$.

Funkcja l dla danego słowa reprezentującego liczbę w zapisie binarnym od tyłu zwraca jego wartość liczbową. "\sum" => "\Sigma"

Funkcja Π_k^j jest projekcją, dla każdego wyrazu z $\sum_k$ zwraca jego j-tą składową, dla każdego słowa z $\sum_k^*$ zwraca j-te składowe z wyrazów(liter) z których słowo się składa

3.1 Automat

Rozważmy automat $A = \langle \sum_k, q_0, Q, F, \delta\rangle$, który prezentuje się następująco:



Ideą automatu jest realizowanie dodawania pisemnego.
Q składa się z następujących stanów:

- stan akceptujący - q_0
- stan z przeniesieniem 1 - q_1 - stan w do którego będą trafiać takie słowa w, że $w \in \sum_3^*$ oraz $l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) = l(\Pi_3^3(w)1)$
- q_2 stan nieakceptujący do którego trafiają słowa z które nie są prefiksem żadnego słowa należącego do relacji dodawania np. 110110 ($a\ (mod\ 100_2) = 11_2$, $b\ (mod\ 100_2) = 11_2$, $c\ (mod\ 100) = 0$, więc niezależnie od dalszych liter $a + b\ (mod\ 100_2) = 10_2 \neq c\ (mod\ 100_2)$)

To moim zdaniem powinien się skończyć dowód.

Dalej autror dowodzi poprawności dodawania pisaemnego.

3.2 Dowód poprawności automatu

3.2.1

W dowodzie twierdzenia będziemy korzystać z następującej obserwacji: dla $x \in \sum_3$ zachodzi $l(wx) = l(w) + 2^{|w|} l(x)$. Dowód łatwo wynika z definicji funkcji l ($l(w)$ oblicza wartość w jako liczy w zapisie dwójkowym od tyłu). spellcheck

3.2.2

Oznaczmy następujące zbiory:

- $Q_0 = \{w : l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) = l(\Pi_3^3(w))\}$ - zbiór słów spełniających relacje dodawania.
- $Q_1 = \{w : l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) = l(\Pi_3^3(w)1)\}$ - zbiór słów spełniających relacje dodawania z przeniesieniem 1.
- $Q_2 = \sum_3^* \setminus (Q_0 \cup Q_1)$

Pokażemy że wszystkie słowa z Q_i w naszym automacie trafiają do stanu q_i dla i=0,1,2.

3.2.3 Lemat:

$$w \in Q_2 \Rightarrow \forall_{x \in \sum_3} wx \in Q_2$$

spellcheck

Proof. Nie wprost. Załużmy że istnieje $x \in \sum_3$, że $wx \in Q_0$. Wtedy dla $k = |w|$ przekształcając:

$$l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) = l(\Pi_3^3(wx))$$

dostajemy:

$$l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^k (l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x))) = l(\Pi_3^3(w)) + 2^k l(\Pi_3^3(x))$$

Łatwo wywnioskować, że

- jeżeli by zachodziło $x \in \{011, 101, 000\}$ (czyt. $l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_3^3(x))$), to musiało by zachodzić $l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) = l(\Pi_3^3(w))$ więc $w \in Q_0$,
- jeżeli $x = 001$ to $l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) = l(\Pi_3^3(w)) + 2^k = l(\Pi_3^3(w)1)$ więc $w \in Q_1$.
- Przypadek w którym $x \in \{111, 100, 010, 110\}$ nie może zajść, bo dla takich x zachodzi: $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) > l(\Pi_3^3(wx))$.

Analogicznie jeżeli założymy że istnieje $x \in \sum_3$, że $wx \in Q_1$. Wtedy:

$$l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^k (l(\Pi_2^3(x)) + l(\Pi_2^3(x))) = l(\Pi_3^3(w)) + 2^k l(\Pi_3^3(x)) + 2^{k+1}$$

Podobnie jak wcześniej wnioskujemy, że jeżeli $x \in \{111, 100, 010\}$ to $w \in Q_1$, $x = 110$ to $w \in Q_0$, a dla $x \in \{001, 011, 101, 000\}$ mamy $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) < l(\Pi_3^3(wx)1)\}$.

Zatem jeżeli $wx \in Q_2$ to $w \in Q_2$. (Implikacja w drugą strone też jest prawdziwa, ale ta nam wystarczy do dowodu)

$\blacksquare$

3.2.4 Lemat:

Zachodzą następujące własności:

a) $\delta(q_0, w) = q_0 \Leftrightarrow w \in Q_0$

b) $\delta(q_0, w) = q_1 \Leftrightarrow w \in Q_1$

Zauważmy że z tej własności, oraz definicji zbioru Q_2 od razu wynika $\delta(q_0, w) = q_2 \Leftrightarrow w \in Q_2$.

Proof. Indukcyjnie względem długości słowa w pokażemy ze zdanie jest prawdziwe dla dowolnego $w \in \sum_3^*$.

1. dla $w = \epsilon$ teza jest oczywista.

2. Zakładamy poprawność naszej tezy dla każdego w długości $|k|$. Chcemy pokazać że dla każdego słowa postaci wx, $x \in \sum_3$ zachodzą następujące własniści :

   a) $\delta(q_0, wx) = q_0 \Leftrightarrow wx \in Q_0$,

   b) $\delta(q_0, wx) = q_1 \Leftrightarrow wx \in Q_1$.

   Dowód własności a)
   $\Rightarrow$ załóżmy że $\delta(q_0, wx) = q_0$. Wtedy patrząc na schemat automatu mamy dwie możliwośći:

   - $x \in \{011, 101, 000\}$ oraz $\delta(q_0, w) = q_0$ - wtedy z założenia indukcyjnego $w \in Q_0$, więc $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) = l(\Pi_1^3(w)\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(w)\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^k(l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x))) = l(\Pi_3^3(w)) + 2^k(\Pi_3^3(x)) = l(\Pi_3^3(wx))$

     stąd $wx \in Q_0$.
   - $x = 001$ oraz $\delta(q_0, w) = q_1$ - wtedy z założenia indukcyjnego $w \in Q_1$. Wtedy $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) = l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^k(l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x))) = l(\Pi_3^3(w)1) + 2^k(0+0) = l(\Pi_3^3(wx))$
     więc $wx \in Q_0$

   $\Leftarrow$ załóżmy że $wx \in Q_0$. Wtedy mamy 2 możliwości:

   - $w \in Q_0$ - przekształcając równanie: $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) = l(\Pi_3^3(wx))$
     dostajemy:
     $l(\Pi_1^3(w)) + 2^k l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^k l(\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_3^3(w)) + 2^k l(\Pi_3^3(x))$
     $l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_3^3(x))$
     Łatwo sprawdzić że tę równośc spełniają tylko $x \in \{011, 101, 000\}$, więc z założenia indukcyjnego $\delta(q_0, w) = q_0$, wnioskujemy że $\delta(q_0, wx) = q_0$

   - $w \in Q_1$ - Analogicznie jak poprzednio przekształcając $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) = l(\Pi_3^3(wx))$
     dostajemy:
     $l(\Pi_1^3(w)) + 2^k l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^k l(\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_3^3(w)1) + 2^k l(\Pi_3^3(x)) - 2^k$
     $l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_3^3(x) - 1)$
     łatwo sprawdzić że jedynie $x = 001$ spełnia tą równość.

   Przypadek gdy $w \in Q_2$ nie jest możliwy z lematu 3.2.3.

   Dowód własności b)
   Dowodzimy analogicznie:
   $\Rightarrow$ załużmy że $\delta(q_0, wx) = q_1$. Wtedy mamy dwie możliwośći:

   - $x = 110$ oraz $\delta(q_0, w) = q_0$ - wtedy z założenia indukcyjnego $w \in Q_0$, więc $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) = l(\Pi_1^3(w)\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(w)\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^{k+1} = l(\Pi_3^3(w)) + 2^{k+1} = l(\Pi_3^3(wx)1)$,
     więc $wx \in Q_1$.

- $x \in \{111, 100, 010\}$ oraz $\delta(q_0, w) = q_1$ - wtedy z założenia indukcyjnego $w \in Q_1$. Wtedy $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) = l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^k(l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x))) = l(\Pi_3^3(w)1) + 2^k(l(\Pi_3^3(x)) + 1) = l(\Pi_3^3(wx)1)$, więc $wx \in Q_1$

$\Leftarrow$ załóżmy że $wx \in Q_1$. Wtedy mamy 2 możliwości

- $w \in Q_0$ - przekształcając równanie: $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) = l(\Pi_3^3(wx)1)$ dostajemy:
  $l(\Pi_1^3(w)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^k(l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x))) = l(\Pi_3^3(w)) + 2^k l(\Pi_3^3(x)) + 2^{k+1}$
  $l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_3^3(x)) + 2$
  Może być spełnione tylko dla $x = 110$. Więc z założenia indukcyjnego $\delta(q_0, w) = q_0$, wnioskujemy że $\delta(q_0, wx) = q_1$

- $w \in Q_1$ - Analogicznie jak poprzednio przekształcając
  $l(\Pi_1^3(wx)) + l(\Pi_2^3(wx)) = l(\Pi_3^3(wx)1)$
  dostajemy:
  $l(\Pi_1^3(w)) + 2^k l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(w)) + 2^k l(\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_3^3(w)1) + 2^k(l(\Pi_3^3(x)) - 1) + 2^{k+1}$
  $l(\Pi_1^3(x)) + l(\Pi_2^3(x)) = l(\Pi_3^3(x)) + 1$
  Oczywiście spełniają to tylko x ze zbioru $\{111, 100, 010\}$. Więc $\delta(q_0, wx) = q_1$

w nie może należeć do Q_2, z lematu 3.2.3.

■

Więc własności a) i b) są spełnione dla wszystkich $w \in \sum_3^*$. Ta pierwsza dowodzi poprawności naszego automatu.