Barbara Zięba

Zadanie 76. Pokaż że istnieje takie $c > 0$, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieją $n > m$ i $L \subseteq \Sigma^*$ takie, że minimalny DFA rozstrzygający L ma n stanów, zaś każdy DFA rozstrzygający $L_{1/2}$ ma przynajmniej cn^2 stanów.

Rozwiązanie

Weźmy $k \in \mathbb{N}$. Niech $\Sigma = \{0, 1\}$, a $L \subset \Sigma^*$ składa się z tych słów, które mają dokładnie k jedynek. Oczywiste jest, że minimalny automat rozpoznający L ma około k stanów – musi pamiętać, ile jedynek już przeczytał. Natomiast jeśli chodzi o język $L_{1/2}$, wydawać by się mogło, że zawiera on słowa, które mają co najwyżej k jedynek. Nie jest to prawda, zapominamy o warunku, że przeczytaliśmy dokładnie połowę słowa z L. Np. dla $k = 5$ słowo 01 nie należy do $L_{1/2}$. Słowo z L, którego pierwszą połową byłoby 01, miałoby 4 litery, czyli nie można do 01 dopisać dwóch liter tak, by powstałe słowo miało w sumie 5 jedynek. W takim razie, intuicyjnie, dla języka $L_{1/2}$ musimy pamiętać ile przeczytaliśmy już jedynek oraz ile przeczytaliśmy już zer, co będzie dawało kwadratową względem k liczbę stanów.

Dowód

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Niech $L \in \{0, 1\}^*$ będzie językiem słów zawierającym dokładnie k jedynek.

DFA rozstrzygający L

Niech $Q = (q_0, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_H)$ i jedyny stan akceptujący to q_k. Po przeczytaniu i jedynek automat będzie znajdować się w stanie q_i, jeśli $0 \leq i \leq k$, a w q_H jeśli $k < i$. Oczywiście q_0 to stan początkowy, po przeczytaniu 0 automat zostaje w tym samym stanie, po przeczytaniu 1 idzie z q_i do q_{i+1}, z q_k do q_H, lub zostaje w q_H. Ten automat rozpoznaje L i ma $k + 2$ stany.

Minimalny DFA rozstrzygający $L_{1/2}$

Skoro język L jest regularny, to język $L_{1/2}$ jest regularny (pokazaliśmy to w innym zadaniu). Aby pokazać ograniczenie dolne na liczbę stanów automatu rozpoznającego $L_{1/2}$, rozważmy słowa $w_{i,j} = 1^i 0^j$ dla $i, j \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{k}{4} \rfloor\}$. Okazuje się, że dla $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ mamy $\hat{\delta}(q_0, w_{i_1,j_1}) \neq \hat{\delta}(q_0, w_{i_2,j_2})$. Rozważmy dwa przypadki:

- $i_1 \neq i_2$

  Bez straty ogólności niech $i_1 < i_2$. Zauważmy, że słowo $w_{i_1,j_1} 1^{k-i_1} = 1^{i_1} 0^{j_1} 1^{k-i_1}$ należy do języka $L_{1/2}$ (zawiera dokładnie k jedynek). Natomiast słowo $w_{i_2,j_2} 1^{k-i_1} = 1^{i_2} 0^{j_2} 1^{k-i_1}$ nie należy do $L_{1/2}$, ponieważ zawiera więcej niż k jedynek.

- $i_1 = i_2$ (nazywajmy je po prostu i) oraz $j_1 \neq j_2$

Znowu bez straty ogólności niech $j_1 < j_2$. Dla $x = k - 2i - j_2$ rozpatrzmy słowa:

$$u_1 = w_{i,j_1}0^x = 1^i 0^{j_1} 0^x = 1^i 0^{k-2i+j_1-j_2}$$
$$u_2 = w_{i,j_2}0^x = 1^i 0^{j_2} 0^x = 1^i 0^{k-2i}$$

Pokażę, że $u_1 \notin L_{1/2}$ i $u_2 \in L_{1/2}$.

W słowie u_1 jest i jedynek, a jego długość to $k - i + j_1 - j_2 < k - i$. Aby otrzymać słowo które zawiera k jedynek (należy do L) potrzebujemy dopisać co najmniej $k - i$ znaków do słowa u_1, zatem u_1 nie należy do $L_{1/2}$.

Natomiast $|u_2| = k - i$ oraz $u_2 0^{k-i} \in L$, więc u_2 należy do $L_{1/2}$.

Pokazaliśmy że dla każdej czwórki $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{k}{4} \rfloor\}$ istnieje słowo v takie że $\hat{\delta}(q_0, w_{i_1,j_1}v) \neq \hat{\delta}(q_0, w_{i_2,j_2}v)$, ponieważ jeden z tych stanów jest akceptujący, a drugi nie. Z tego wynika, że $\hat{\delta}(q_0, w_{i_1,j_1}) \neq \hat{\delta}(q_0, w_{i_2,j_2})$. Zatem minimalny automat musi mieć $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor^2 \geq (\frac{k-3}{4})^2 \geq \frac{(k-3)^2}{16}$ stanów.

Zatem dla n z zadania bierzemy $k = n - 2$. Wtedy minimalny DFA rozstrzygający L ma co najwyżej n stanów, zaś każdy DFA rozstrzygający $L_{1/2}$ ma przynajmniej $\frac{(k-3)^2}{16} = \frac{(n-5)^2}{16} = \Omega(n^2)$ stanów.