Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa: Zadanie 25

Marcin Witkowski

20 marca 2020

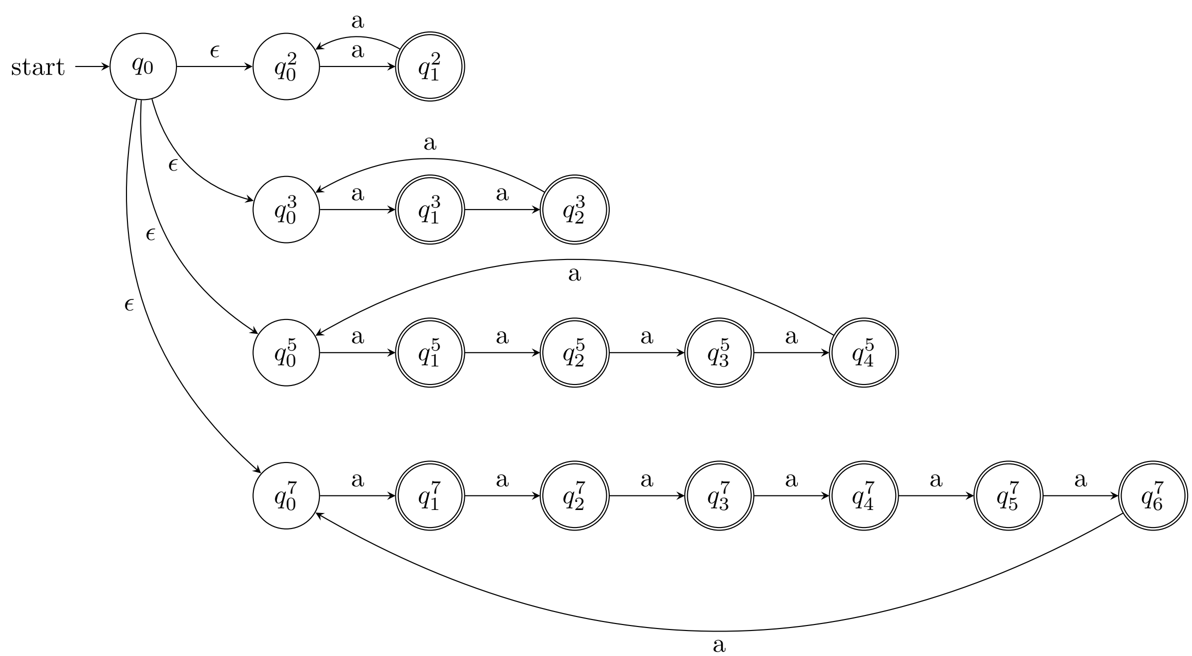
Treść

Minimalny *DFA* rozpoznający język $\mathcal{L}$ ma zawsze samo stanów co minimalny *DFA* rozpoznający dopełnienie $\mathcal{L}$. Stwierdzenie to przestaje być prawdziwe, jeśli rozważamy automaty niedeterministyczne. Udowodnij, że istnieje język $\mathcal{L}$, który daje się rozpoznać a pomocą *NFA* o mniej niż 20 stanach, ale którego dopełnienie nie daje się rozpoznać żadnym *NFA* o mniej niż 200 stanach.

Rozwiązanie

Na ostatnim wykładzie został przedstawiony język złożony ze słów, których długość były niepodzielne przez 105. Korzystając z tego pomysłu, weźmy język $\mathcal{L} = \{a^n : 210 \nmid n\}$ nad unarnym alfabetem $\Sigma = \{a\}$. Pokażemy teraz, że $\mathcal{L}$ spełnia założenia z treści zadana.

Na początku pokażemy, że istnieje *NFA* rozpoznający ten język o mniej niż 20 stanach. Zauważmy, że $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Możemy zatem zbudować *NFA* sprawdzający, czy długość słowa jest niepodzielna przez żaden z pierwszych dzielników liczby 210. Dla każdego dzielnika d tworzymy d nowych stanów $q_0^d, q_1^d, \ldots, q_{d-1}^d$, gdzie wszystkie stany poza q_0^d są akceptujące. Następnie dla każdych dwóch stanów q_i^d, $q_{(i+1 \mod d)}^d$, gdzie $0 \leq i < d$ tworzymy przejście wczytujące znak a. Tak stworzone *pętle* będziemy wykorzystywać do sprawdzania, czy wczytywany wyraz jest niepodzielny przez d. Ponieważ q_0^d jest nieakceptujący, żaden wyraz długości $n \equiv 0 \pmod d$ nie zostanie zaakceptowany. Ostatecznie skorzystamy z niedeterminizmu, aby przejść do odpowiedniej *pętli*. Tym samym stworzymy stan q_0 i połączymy go ϵ-przejściami ze wszystkimi stanami q_0^d. Intuicyjnie można o tym myśleć tak, że najpierw automat "dostaje przesłankę" o dzielniku przez który nie dzieli się długość wczytywanego słowa, a następnie sprawdza czy owa "przesłanka" jest prawdziwa. Poprawność tak zbudowanego automatu wynika oczywiście z konstrukcji. Ilość potrzebnych stanów to natomiast $1 + 2 + 3 + 5 + 7 = 18 < 20$.



Rysunek 1: Automat rozpoznający język $\mathcal{L}$

Pokażemy teraz, że dopełnienie języka $\mathcal{L}$, tj. $\bar{\mathcal{L}} = \{a^n : 210 \mid n\}$, wymaga *NFA* mającego więcej niż 200 stanów. Załóżmy nie wprost, że istnieje *NFA* o mniej niż 200 stanach rozpoznający $\bar{\mathcal{L}}$. Weźmy wyraz $w = a^{210}$. Wiemy, że w jest akceptowany przez ten *NFA* (założenie). Jako że $|w| > |Q|$, wiemy z zasady szufladkowej Dirichleta, że co najmniej jeden ze stanów w *NFA* zostanie odwiedzony dwa razy. Nazwijmy ten stan q_q. Popatrzmy teraz na ścieżkę akceptującą dla w. Zauważmy, że jeżeli zamienimy w niej ścieżkę $q_q \to \cdots \to q_q$ na pojedyncze wystąpienie q_q dalej będziemy mieli poprawną ścieżkę akceptującą jakiś inny wyraz v. Jako że $q_q \to \cdots \to q_q$ jest co najmniej długości dwa, długość v będzie równa co najwyżej 209. Zatem rozważane *NFA* zaakceptuje słowo nienależące do $\bar{\mathcal{L}}$, co jest sprzeczne z założeniem, że ten automat rozpoznaje język $\bar{\mathcal{L}}$. Wobec tego nie istnieje *NFA* o mniej niż 200 stanach rozpoznający $\bar{\mathcal{L}}$.

To jest dobre rozwiązanie. Podoba mi się.
Są drobne problemy, ale łatwo je poprawić.