Języki Formalne i Złożoność Obliczeniowa

Rozwiązanie zadania 79

Jakub Mendyk

20 marca 2020

Treść

Pokaż, że jeśli $A \leqslant_{reg} B$ i B regularny to A też.

Oznaczenia

Niech $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Sigma_1^*$, $\mathcal{T} = \left\langle \Sigma, \Sigma_1, Q_{\mathcal{T}}, q_0^{\mathcal{T}}, \delta_{\mathcal{T}}, \sigma_{\mathcal{T}} \right\rangle$ – transducer Mealy'ego będący świadkiem $A \leqslant_{reg} B$, zaś DFA $\mathcal{B}$ rozpoznaje język B.

Pomysł rozwiązania

Gdybyśmy umieli skonstruować DFA $\mathcal{A}$ z funkcją przejścia $\delta_{\mathcal{A}}$ taką że $q_{\mathcal{A}}(w) \in F_{\mathcal{A}} \iff q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)) \in F_{\mathcal{B}}$ łatwo otrzymalibyśmy, że

$$w \in A \overset{A \leqslant_{reg} B}{\iff} f_{\mathcal{T}}(w) \in B \overset{B \text{ regularny}}{\iff} q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)) \in F_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow q_{\mathcal{A}}(w) \in F_{\mathcal{A}} \tag{1}$$

$$w \in A \iff q_{\mathcal{A}}(w) \in F_{\mathcal{A}} \tag{2}$$

DFA $\mathcal{A}$ rozpoznawałby język A, zatem A byłby regularny.

Rozwiązanie

Spróbujmy w wyrażeniu $q_{\mathcal{A}}(wa) \in F_{\mathcal{A}} \iff q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(wa)) \in F_{\mathcal{B}}$ rozdzielić w od a i otrzymać warunek który $\delta_{\mathcal{A}}$ musi spełniać by $q_{\mathcal{A}}$ był zgodny z naszym pomysłem na rozwiązanie.

$$q_{\mathcal{A}}(wa) \in F_{\mathcal{A}} \iff q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(wa)) \in F_{\mathcal{B}} \tag{3}$$
$$q_{\mathcal{A}}(wa) \in F_{\mathcal{A}} \iff q_{\mathcal{B}}((f_{\mathcal{T}}(w))\sigma_{\mathcal{T}}(q_{\mathcal{T}}(w),\, a)) \in F_{\mathcal{B}} \tag{4}$$
$$\delta_{\mathcal{A}}(q_{\mathcal{A}}(w),\, a) \in F_{\mathcal{A}} \iff \hat{\delta}_{\mathcal{B}}(q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)),\, \sigma_{\mathcal{T}}(q_{\mathcal{T}}(w),\, a)) \in F_{\mathcal{B}} \tag{5}$$

Zauważmy, że jedynie argumenty związane ze stanem – $q_{\mathcal{A}}(w), q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)), q_{\mathcal{T}}(w)$ zależą od w, gdyby $q_{\mathcal{A}}(w) = (q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)),\, q_{\mathcal{T}}(w))$ to $\delta_{\mathcal{A}}$ spełniałoby nasze oczekiwania.

Czyli DFA $\mathcal{A} = \left\langle \Sigma, Q_B \times Q_{\mathcal{T}}, (q_0^{\mathcal{B}}, q_0^{\mathcal{T}}), F_{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{B}} \times Q_{\mathcal{T}}, \delta_{\mathcal{A}} \right\rangle$ powinien rozpoznawać A, gdzie $\delta_{\mathcal{A}}((q^{\mathcal{B}}, q^{\mathcal{T}}), a) = (\hat{\delta}_{\mathcal{B}}(q^{\mathcal{B}}, \sigma_{\mathcal{T}}(q^{\mathcal{T}}, a)),\, \hat{\delta}_{\mathcal{T}}(q^{\mathcal{T}}, a)))$.

Lemat 1. *Dla dowolnego słowa $w \in \Sigma^*$ zachodzi $q_{\mathcal{A}}(w) = (q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)), q_{\mathcal{T}}(w))$*

Dowód. (indukcyjnie względem długości w)

1. $w = \epsilon$

$$q_{\mathcal{A}}(\epsilon) = (q_0^{\mathcal{B}}, q_0^{\mathcal{T}}) = (q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(\epsilon)), q_{\mathcal{T}}(\epsilon)) \tag{6}$$

2. ZI: $\forall w \in \Sigma^*.\ |w| \leqslant n \Rightarrow q_{\mathcal{A}}(w) = (q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)), q_{\mathcal{T}}(w))$
   TI: $\forall w \in \Sigma^*, a \in \Sigma.\ |w| \leqslant n \Rightarrow q_{\mathcal{A}}(wa) = (q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(wa)), q_{\mathcal{T}}(wa))$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{A}}(wa) &= \delta_{\mathcal{A}}(q_{\mathcal{A}}(w),\, a) = \delta_{\mathcal{A}}((q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)),\, q_{\mathcal{T}}(w)),\, a) && (7)\\ &= (\hat{\delta}_{\mathcal{B}}(q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)),\, \sigma_{\mathcal{T}}(q_{\mathcal{T}}(w),\, a)), \hat{\delta}_{\mathcal{T}}(q_{\mathcal{T}}(w),\, a))) && (8)\\ &= (q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)\sigma_{\mathcal{T}}(q_{\mathcal{T}}(w),\, a)),\, q_{\mathcal{T}}(wa)) && (9)\\ &= (q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(wa)),\, q_{\mathcal{T}}(wa)) && (10) \end{aligned}$$

□

Zatem wiemy, że

$$q_{\mathcal{A}}(w) \in F_{\mathcal{A}} \overset{F_{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{B}} \times Q_{\mathcal{T}}}{\iff} q_{\mathcal{B}}(f_{\mathcal{T}}(w)) \in F_{\mathcal{B}} \overset{\mathcal{B} \text{ rozpoznaje } B}{\iff} f_{\mathcal{T}}(w) \in B \overset{A \leqslant_{reg} B}{\iff} w \in A \tag{11}$$

stąd DFA $\mathcal{A}$ rozpoznaje język A czyli A jest regularny.