Zadanie 75

Wiktor Garbarek

4 kwietnia 2020

Definicja 1. Niech $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Niech $P \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ będzie określona jako najmniejsza symetryczna relacja taka, że:

- dla każdego $w \in \Sigma^*$ zachodzi $P(w, \varepsilon)$;
- dla każdego $a \in \Sigma$ i każdych $w, v \in \Sigma^*$ jeśli $P(w, v)$ to $P(aw, av)$.

Przez $L_{p/q}$, gdzie $L \subseteq \Sigma^*$, oznaczać będziemy język:

$$\{w \in \Sigma^* : \exists v \; v \in L \land P(w, v) \land |w|/|v| = p/q\}$$

Zadanie 75 (a). Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie regularny. Czy wynika z tego, że język $L_{3/2}$ jest regularny?

Dowód. Wykorzystamy lemat o pompowaniu, żeby pokazać, że taki język nie jest regularny.

Rozważmy język $L = \{b^i : i \in \mathbb{N}\}$, który oczywiście jest regularny, bo jest opisywany przez wyrażenie regularne b^*. Niech n będzie stałą z lematu o pompowaniu i rozważmy słowo

$$w = b^{2n} a^n$$

Oczywiście $w \in L_{3/2}$, a świadkiem spełnienia definicji będzie słowo $v = b^{2n}$ (bo v jest prefiksem w oraz $\frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$). Niech zatem $w = xyz$ będzie podziałem z lematu (a więc $|xy| = b^m$, gdzie $m \leqslant n$). Zatem zachodzi również

$$xy^0z = xz \in L_{3/2}$$

- Jeśli $3 \nmid |xz|$ sprzeczność otrzymujemy od razu, bo świadek na należenie do $L_{3/2}$ musiałby mieć długość niebędącą liczbą naturalną.
- Jeśli natomiast $3 \mid |xz|$ to także $|y| = 3k$

$$xz = b^{2n-3k} a^n$$

Zgodnie z definicją relacji P, v będące świadkiem przynależenia xz do $L_{3/2}$ byłoby jego prefiksem długości $\frac{2}{3}|xz| = 2n-2k$. Ale wtedy v jest postaci $b^{2n-3k}a^k$, czyli w szczególności nie jest ciągiem samych liter b, więc nie może należeć do L. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

□

Zadanie 75 (b). Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie regularny. Czy wynika z tego, że język $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_{1/i}$ jest regularny?

Dowód. $P(w,v)$ w naturalnym języku oznacza "w jest prefiksem v, lub v jest prefiksem w". Zmienimy nieco definicję języka z zadania na równoważną tj.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_{1/i} = L \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} L_{1/(k+1)}$$

gdzie zauważmy, że

$$L_{1/(k+1)} = \{w \in \Sigma^* : \exists v \; wv \in L \wedge |v| = k|w|\}$$

Idea tej transformacji jest taka, że

- Oczywiście $L_{1/1} = L$ – wynika to wprost z wybierania świadków, oraz faktu, że $\forall w \in \Sigma^* \; P(w,w)$
- Wygodniej nam myśleć o wyborze sufiksu o odpowiedniej długości, niż wyborze świadka z poprzedniej definicji.

Wiedząc, że suma dwóch języków regularnych dalej jest regularna, wystarczy udowodnić zatem, że $L' = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_{1/(k+1)}$ jest regularny. Weźmy automat $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ rozpoznający język L. Skonstruujemy automat $A' = \langle \Sigma, Q', q_0', F', \delta' \rangle$ rozpoznający powyższy język.

$$Q' = Q \times \mathcal{P}(Q)^{\mathcal{P}(Q)}$$

$$F' = \{(q,f) \in Q' : \exists n \; f^n(\{q\}) \cap F \neq \emptyset\}$$

$$q_0' = (q_0, \mathrm{id})$$

$$\delta'((q,f),a) = (\delta(q,a), g)$$

gdzie

$$g(S) = \{\delta(q',b) : b \in \Sigma, q' \in f(S)\}$$

O ile powyższa konstrukcja może wydawać się zawiła, to tak naprawdę jej motywacja jest bardzo prosta. Gdy dostajemy słowo w, czytając je znak po znaku w naszej funkcji w pewnym sensie zapamiętujemy długość w.

Innymi słowy, jeśli $\hat{\delta}'((q_0, \mathrm{id}), w) = (q, f)$, to $f(\{q\})$ to zbiór wszystkich stanów, do jakich potrafimy dojść po $|w|$ krokach wychodząc od stanu q. Analogicznie $f^2(\{q\})$ – wszystkie stany, do jakich potrafimy dojść po $2|w|$ krokach od q, $f^3(\{q\})$ – stany po $3|w|$ krokach itd. Zatem jeśli mamy jakieś k takie, że w zbiroze $f^k(\{q\})$ istnieje stan akceptujący, to znaczy, że dla słowa $|w|$ możemy skonstruować świadka v (o długości $k|w|$), który potwierdzi, że $w \in L_{1/(k+1)}$

Udowodnijmy zatem nieco bardziej formalnie, że $L_{A'} = L'$

- $(\subseteq)$. Weźmy dowolne słowo $w \in L_{A'}$. Niech

  $$\hat{\delta}'((q_0, \mathrm{id}), w) = (q, f) \in F'$$

  Weźmy także jakieś n, takie, że $f^n(\{q\}) \cap F \neq \emptyset$ i niech p będzie jakimś stanem należącym do tego przekroju. Istnieje zatem ścieżka długości $n|w|$ od stanu q do stanu p, a ścieżka ta wyznacza nam jakieś słowo należące do języka L. Dokładnie to słowo jest świadkiem, że $w \in L_{1/(n+1)}$, ponieważ $wv \in L$.

- $(\supseteq)$ Weźmy $w \in L'$. Istnieją zatem $k \in \mathbb{N}, v \in \Sigma^*$ takie, że $wv \in L$ oraz $|v| = k|w|$. W takim razie

  $$\hat{\delta}(q_0, wv) \in F$$

  oraz

  $$\hat{\delta}(q_0, wv) \in f^k(\{\hat{\delta}(q_0, w)\})$$

  Skoro jednak ten stan należy do obu tych zbiorów jednocześnie, to w takim razie ich przekrój jest niepusty, a więc $w \in L_{A'}$.

$\square$