Treść zadania.

Zadanie 29

Artur Błaszkwicz

Wrocław, March 29, 2020

Pomysł Żeby odpowiedzieć na pytanie, czy słowo należy do języka $\sqrt{L}$ trzeba wiedzieć, czy można to słowo przedłużyć dopisując odpowiednią ilość liter na końcu, tak, aby należało ono do języka L . W tym celu chciałbym rozpatrzyć automat A , który rozpoznaje język L i popatrzeć, które stany mogą przejść do stanu akceptującego czytając określoną liczbę liter. Jak się okazuje z powodu cykliczności można w skończonej pamięci określić dla każdego stanu, jakiej długości słowa mogą sprawić, że przejdzie on na stan akceptujący. Pozostaje odpowiedzieć, czy możemy wiedzieć jak dużo liter musimy dopisać, po przeczytaniu słowa, jednak wystarczy, że będziemy pamiętać coś ala modulo. Wartość funkcji $x^2 - x$ można pamiętać jako aktualną wartość oraz pochodną, obie wartości są przyjazne dla modulowania.

cykliczna natura Niech $A = \{\Sigma, Q, q_0, Q_{acc}, \delta\}$ będzie automatem rozpoznającym język L . Dla każdego stanu $q_i \in Q$ zdefiniujemy zbiory $X_{i,j}$, $0 \leq j \leq |\mathcal{P}(Q)|^{|Q|}$ oznaczające zbiór stanów osiągalnych z q_i po równo j przejściach δ . niejasna definicja

Oczywiście dla pewnych $j, j' \leq |2\mathcal{P}(Q)| \wedge j \neq j'$ zachodzi $X_{i,j} = X_{i,j'}$, czyli dla każdego i ciąg zbiorów $X_{i,j}$ dla $j \geq J$, $J < |2\mathcal{P}(Q)|$ jest cykliczny o okresie $\leq |2\mathcal{P}(Q)|$. Oznacza to, że istnieją takie $k, k' \leq |2\mathcal{P}(Q)|^{|Q|} \wedge k \neq k'$, że dla każdego $i, 0 \leq i < |Q|$ zachodzi $X_{i,k} = X_{i,k'}$. A więc $\forall n \in \mathbb{N} \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < |Q|$ $X_{i,k} = X_{i,k+n|k-k'|}$. Niech $t = |k - k'|$

Wyjaśnić

konstrukcja automatu Rozważmy następujący automat:

$$A' = (\Sigma, Q', q'_{0,0,0}, Q'_{acc}, \delta')$$

Niech jego stan spełnia następujące własności:

$$\forall y \in \Sigma \quad \delta(q_i, y) = q_{i'} \Rightarrow \delta'(q'_{i,a,b}, y) = q'_{i',a+2b,b+1}$$

$$q'_{i,a,b} \in Q'_{acc} \iff \exists q_x \in X_{i,a} \cap Q_{acc}$$

Ideą tego automatu jest pamiętanie dwóch informacji, w jakim stanie byłby automat A po przeczytaniu tego słowa, oraz ile liter musimy dopisać, aby podnieść długość słowa do kwadratu. Mając te dwie informacje wystarczy

sprawdzić, czy możemy dopisać te litery tak, aby powstałe słowo należało do L . Na to pytanie odpowiadają zbiory $X_{i,j} \cap Q_{acc}$. Pozostaje kwestia nieskończonej ilości stanów A' , zauważmy, że z powodu wspólnego okresu t wszystkich ciągów $X_{i,j}$ mamy:

$$\forall a \geq |4\mathcal{P}(Q)|^{|Q|} \forall v \in \Sigma^* \quad \hat{\delta}(q'_{i,a,b}, v) \in Q'_{acc} \iff \hat{\delta}(q'_{i,a-t,b}, v) \in Q'_{acc},$$

$$\forall b \geq |4\mathcal{P}(Q)|^{|Q|} \forall v \in \Sigma^* \quad \hat{\delta}(q'_{i,a,b}, v) \in Q'_{acc} \iff \hat{\delta}(q'_{i,a,b-t}, v) \in Q'_{acc}$$

Czyli te stany są równoważne dla naszego automatu. Więc

$$Q' = \{q_{i,a,b} : i, a, b \geq 0 \wedge i < |Q| \wedge a, b \leq |4\mathcal{P}(Q)|^{|Q|}\}.$$

Oznacza to, że A' ma skończenie wiele stanów.