Adrianna Struzik

Definicja

Zdefiniujmy funkcję $l : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ jako $l(\varepsilon) = 0$, $l(0) = 2l(w)$, $l(1w) = 2l(w) + 1$.
Dla liczby naturalnej k zdefiniujmy $\Sigma_k = \{0,1\}^k$.
Dla liczb naturalnych $j \leqslant k$ zdefiniujmy funkcję Π_k^j:$\Sigma_k^* \to \{0,1\}^*$ jako: $\Pi_k^j(\varepsilon) = \varepsilon$,
$\Pi_k^j(\langle a_1, a_2, ...a_j, ...a_k\rangle w) = a_j \Pi_k^j(w)$, gdzie $\langle a_1, a_2, ...a_j, ...a_k\rangle \in \Sigma_k$.

Relację $R \subseteq \mathbb{N}^k$ nazwiemy *automatyczną*, jeśli język L_R złożony z tych słów $w \in \Sigma_k^*$, dla których zachodzi $R(l(\Pi_k^1(w)), l(\Pi_k^2(w)), ...l(\Pi_k^k(w)))$, jest regularny.

Zadanie 42

Czy relacja mnożenia jest automatyczna? Przez relację mnożenia rozumiemy tu $\{\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{N}^3 : ab = c\}$.

Rozwiązanie

Pokażemy, że język L_R, dla relacji mnożenia nie jest regularny, więc relacja nie jest automatyczna.

Niech n będzie stałą z lematu o pompowaniu. Weźmy słowo w takie, że:

$$w = \underbrace{(000)(000)...(000)}_{n}(110)\underbrace{(000)...(000)}_{n-1}(001),$$

gdzie $(b_1 b_2 b_3) \in \Sigma_3$.
Odpowiada ono wyrażeniu $2^n * 2^n = 2^{2n}$, więc w należy do L_R. (Ponieważ pierwsze bity każdego symbolu tworzą liczbę 2^n, drugie też, a trzecie bity tworzą liczbę 2^{2n}, zgodnie z działaniem funkcji l.)

Jeśli spojrzymy na dowolny podział słowa na xyz zgodny z lematem o pompowaniu to musi zachodzić $y = (000)^l$, dla pewnego $l \geqslant 1$, wtedy:

$$xy^k z = \underbrace{(000)(000)...(000)}_{n+l(k-1)}(110)\underbrace{(000)...(000)}_{n-1}(001),$$

co odpowiada wyrażeniu $2^{n+l(k-1)} * 2^{n+l(k-1)} = 2^{2n+l(k-1)}$, więc $xy^k z \notin$L$_R$ dla $k > 1$. $\lightning$