# Zadanie 40M

Artur Błaszkiewicz

Wrocław, April 7, 2020

**Treść zadania:** Udowodnij, że dla każdego (dostatecznie dużego) $n$ istnieje PDFA $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$, taki że $|Q| = n$ i że...

**Wersja M.** ...istnieje trzyelementowy $S \subseteq Q$ taki że zbiór $csync(S)$ jest niepusty ale nie zawiera słowa krótszego niż $n^3/10000$.

**Konstrukcja $\mathcal{A}$:** Skonstuujmy $\mathcal{A}$ w następujący sposób: Dzielimy stany $Q$ na trzy rozłączne części $Q_0, Q_1, Q_2$. Niech

$$Q_0 = \{q_0, q_1, ..., q_{m-1}\}$$
$$Q_1 = \{q_m, q_{m+1}, ..., q_{2m-1}\}$$
$$Q_2 = \{q_{2m}, q_{2m+1}, ..., q_{n-1}\}$$

gdzie $m = \lfloor n/3 \rfloor$.

$$S = \{q_0, q_m, q_{2m}\}$$
$$\Sigma = \{a, b, c, d\}$$

Dla $i < m-1 : \delta(q_i, a) = q_{i+1}$
Dla $i \geq m-1 : \delta(q_i, a) = q_i$.

Dla $i < m-1 : \delta(q_i, b)$ jest niezdefiniowana.
Dla $i = m-1 : \delta(q_i, b) = q_0$
Dla $m-1 < i < 2m-1 : \delta(q_i, b) = q_{i+1}$
Dla $i \geq 2m-1 : \delta(q_i, b) = q_i$

Dla $i = m-1 \vee i = 2m-1 : \delta(q_i, c) = q_{i-(m-1)}$
Dla $2m \leq i < q_{n-1} : \delta(q_i, c) = q_{i+1}$
W pozostałych stanach $\delta(\_, c)$ niezdefiniowane.

Dla $i = 0 \vee i = m \vee i = n-1 : \delta(q_i, d) = q_n$ W pozostałych stanach $\delta(\_, d)$ niezdefiniowane.

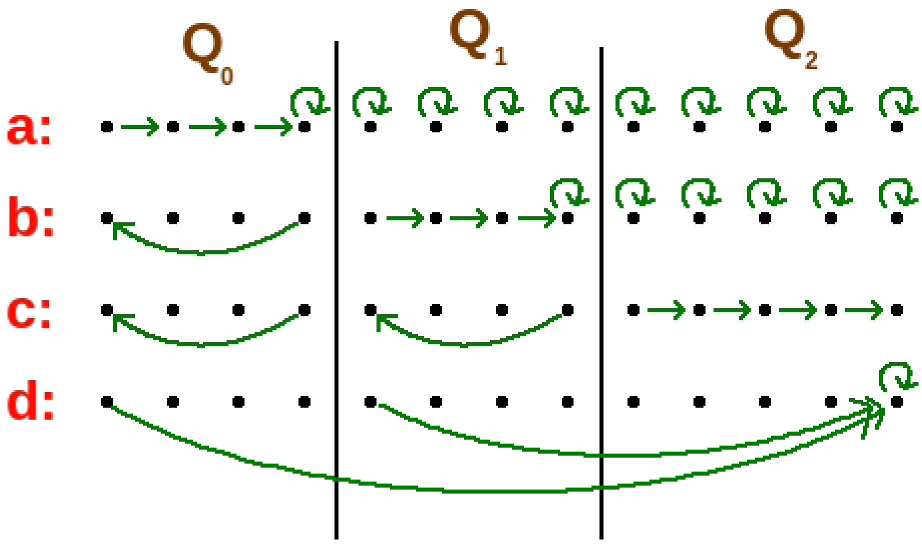


Figure 1: $\mathcal{A}$

**Automat $\mathcal{A}$ spełnia warunki zadania:**

1. Jeśli $q_i \in Q_j \wedge x \in \{a, b, c\}$ to $\delta(q_i, x) = Q_j$, czyli słowa z $csync(S)$ zawierają literkę $'d'$.

   Dowód jest przez przypadki.

2. Słowa z $csync(S)$ zawierające $'d'$ zawierają co najmniej $n - 2m - 1$ literek $'c'$.

   Mówię, że literka $'x'$ jest przejściem ze stanu $q_i$ do stanu $q_j$, gdy $\delta(q_i, x) = q_j$

   Stan $q_{2m} \in S$ jest w $Q_2$, gdzie jedynym stanem ze zdefiniowanym przejściem $'d'$ jest stan $q_{n-1}$. Dojść do niego można tylko za pomocą przejść $'c'$, których musimy wykonać $(n - 1) - 2m$.

   Zauważmy, że $n - 2m - 1$ literek $'c'$ musi wystąpić przed $'d'$, więc w dalszej części rozwiązania zakładam, że $'d'$ nie pojawiło się wcześniej w słowie.

3. W słowie z $csync(S)$ pomiędzy każdymi dwoma literkami $'c'$ jest co najmniej $m - 1$ literek $'b'$.

   Jeżeli $\mathcal{A}$ będąc w stanie $q_i \in Q_1$ przeczyta słowo $w \in \{a, b, c\}^*$ i ostatnią literką słowa $w$ jest $'c'$ oraz czytając funkcja przejścia była zawsze zdefiniowana to $\mathcal{A}$ znajduje się w stanie $q_m$, ponieważ tylko dla

$q_{2m-1} \in Q_1$ przejście $'c'$ jest zdefiniowane. Żeby dojść ponownie do $q_{2m-1}$ z $q_m$ potrzebujemy $(2m-1)-m$ przejść $'b'$.

4. W słowie z $csync(S)$ pomiędzy każdymi dwoma literkami $'b'$ jest co najmniej $m-1$ literek $'a'$.

   Dowód nalogiczny do dowodu punktu 3.

5. Daje nam to minimalną ilość liter $'a'$ w słowie z $csync(S)$

   $$(n-2m-2)(m-2)(m-1) \geq (m-2)(m-2)(m-2) = (\lfloor n/3 \rfloor - 2)^3 \geq$$
   $$\geq (n/3-3)^3$$

   Co dla dużych $n$ ($n \geq 10$) jest większe niż $n^3/10000$.

6. Zbiór $csync(S)$ jest niepusty

   Do $scync(S)$ należy słowo $((a^{m-1}b)^{m-1}(a)^{m-1}c)^{n-2m-1}d$, co można łatwo sprawdzić.

Ponieważ $csync(S)$ jest niepusty i wszystkie słowa z $csync(S)$ mają co najmniej $(n/3-3)^3$ liter to automat $\mathcal{A}$ spełnia warunki zadania.