JFiZO

Michał Kucharczyk

April 2020

1 Zadanie nr 76

1.1 Treść

Pokaż że istnieje takie $c > 0$, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieją $n > m$ i $L \subseteq \Sigma^*$ takie, że minimalny DFA rozstrzygający L ma n stanów, zaś każdy DFA rozstrzygający $L_{1/2}$ ma przynajmniej cn^2 stanów.

1.2 Rozwiązanie

Dla ustalonego m, weźmy $n > m$ – parzyste. Niech $\Sigma = \{0, 1\}$ i $L = \{w \in \Sigma^* : \#1(w) = n\}$ ($\#1(w) :=$ liczba jedynek w słowie w, analogicznie będę oznaczał liczbę zer przez $\#0(w)$).
L jest regularny. DFA rozpoznający L może mieć $n + 2$ stanów, reprezentujących liczbę jedynek słowa od 0 do n i jeden dodatkowy, mówiący, że liczba jedynek jest większa od n. Funkcja przejścia δ, oraz zbiór stanów akceptujących określona jest w sposób naturalny.
Lemat 1:
Każdy DFA rozpoznający L ma przynajmniej n stanów.
Weźmy dowolny DFA $\mathcal{A}$ rozpoznający L i zbiór $A = \{w_i := 1^i : 0 \leqslant i \leqslant n\}$. $|A| = n + 1$. Pokażę, że dla każdej pary $w_i, w_j (i \neq j)$ $\hat{\delta}(q_0, w_i) \neq \hat{\delta}(q_0, w_j)$, co implikuje, że $\mathcal{A}$ ma przynajmniej $n + 1$ stanów.
Gdyby dla pewnych $i < j$ $\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$ to zachodziłaby również równość $\hat{\delta}(q_0, w_i 1^{n-j}) = \hat{\delta}(q_0, w_j 1^{n-j})$, lecz stan po prawej stronie równości jest akceptujący, a po lewej nie, co daje sprzeczność.
Lemat 2:
Każdy DFA rozpoznający $L_{1/2}$ ma $\Omega(n^2)$ stanów.
Weźmy dowolny DFA $\mathcal{B}$ rozpoznający $L_{1/2}$ i zbiór $B = \{v_{ij} := 1^i 0^j : 2i + j < n\}$. $|B| = \Omega(n^2)$ (*).
Zauważmy, że $L_{1/2} = \{w \in \Sigma^* : \#0(w) + 2^*\#1(w) \geqslant n \wedge \#1(w) \leqslant n\}$. Jest tak dlatego, że dowolne słowo $v \in \Sigma^*$, którego prefixem jest w i $|v| = 2|w|$ ma maksymalnie $\#0(w) + 2^*\#1(w)$ jedynek, a minimalnie $\#1(w)$ (i może mieć dowolną pośrednią liczbę jedynek).
Analogicznie do dowodu poprzedniego lematu pokażę, że dla $\langle i, j\rangle \neq \langle i', j'\rangle$
$\hat{\delta}(q_0, v_{ij}) \neq \hat{\delta}(q_0, v_{i'j'})$, co wystarczy.
Zauważmy, że dla $i < i'$ $\hat{\delta}(q_0, v_{ij}) \neq \hat{\delta}(q_0, v_{i'j'})$. W przeciwnym wypadku mielibyśmy :

$$\hat{\delta}(q_0, 1^n 0^j) = \hat{\delta}(q_0, 1^{n-i} v_{ij}) = \hat{\delta}(q_0, 1^{n-i} v_{i'j'}) = \hat{\delta}(q_0, 1^{n-i+i'} 0^{j'})$$

$1^n 0^j \in L_{1/2}$, a $1^{n-i+i'} 0^{j'} \notin L_{1/2}$ (bo $n - i + i' > n$) co daje sprzeczność.
Muszę więc tylko pokazać, że dla $j < j'$ $\hat{\delta}(q_0, v_{ij}) \neq \hat{\delta}(q_0, v_{ij'})$. Znów, gdyby $\hat{\delta}(q_0, v_{ij}) = \hat{\delta}(q_0, v_{ij'})$ moglibyśmy słowo $0^{n-j'-2i}$, wtedy:

$$\hat{\delta}(q_0, 1^i 0^j 0^{n-j'-2i}) = \hat{\delta}(q_0, v_{ij} 0^{n-j'-2i}) = \hat{\delta}(q_0, v_{ij'} 0^{n-j'-2i}) = \hat{\delta}(q_0, 1^i 0^{j'} 0^{n-j'-2i})$$

Słowo $1^i 0^j 0^{n-j'-2i} = 1^i 0^{n+j-j'-2i} \notin L_{1/2}$, ponieważ $2i + n + j - j' - 2i = n + j - j' \ngeq n$, natomiast słowo $1^i 0^{j'} 0^{n-j'-2i} = 1^i 0^{n+j'-j'-2i} \in L_{1/2}$, bo $2i + n + j' - j' - 2i = n \geqslant n$ (i $i < n$), co znów prowadzi do sprzeczności. Stąd dowolnie wybrane $\mathcal{B}$ rozpoznające $L_{1/2}$ ma przynajmniej $|B| = \Omega(n^2)$ stanów, co należało pokazać.
(*) $|B| = (n-1) + (n-3) + (n-5) + ... + 3 + 1$
$2|B| + \frac{n}{2} = n + (n-1) + ... + 2 + 1$, więc
$|B| = \frac{n(n-1)}{4} - \frac{n}{2} = \frac{n^2-3n}{4} > \frac{1}{5}n^2$ dla odpowiednio dużego n.